前回の復習

前回は $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ が完備な距離空間であることを示しました．それによってとくに $f \in L^2(-\pi,\pi)$ の Fourier 級数 $\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e_n$ は L^2 収束の意味では $L^2(-\pi,\pi)$ の中に極限を持つことになったのでした．

このように完備性は空間が「大きい」ということを表す結果です．一方で $L^2(-\pi,\pi)$ の中身がどんなものかを知りたいというのも自然なことで，それは空間が「小さい」ことを示したいということです．これは前回存在だけが分かった $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e_n$ が元の関数 f と一致することを示すことにもつながります．

どういう種類の結果を目指しているかを見るために，まず少し簡単な場合に見本となる結果を見ておきましょう．

定理

任意の $f \in C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ は $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の線型結合で一様近似できる．

これは位相の言葉を使えば，$(C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi], \|\cdot\|_\infty)$ において $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が生成する部分空間が稠密であるということです．

連続関数の三角多項式による一様近似

この定理は第 2 回に本質的に証明しています．実際，Poisson の定理により $\lim_{r\nearrow 1}\|f-P_rf\|_\infty=0$ であり，一方で

$$\lim_{N\to\infty}\left\|P_rf-\sum_{n=-N}^{N}r^{|n|}\widehat{f}(n)e_n\right\|_\infty=0$$

も Weierstrass の判定法で分かるので，r を十分 1 に近くとってから N を大きくとれば $\sum_{n=-N}^{N}r^{|n|}\widehat{f}(n)e_n$ が f の近似になります． □

この定理からすぐに分かる次の結果も有用です．

定理 (Weierstrass の多項式近似定理)

任意の $f\in C[-1,1]$ は多項式で一様近似できる．

これはまず $f\in C[-1,1]$ が $C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ の関数に拡張できることに注意すると $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の線型結合で一様近似でき，さらに各 e_n は解析関数なので多項式で近似できることから分かります． □

C^∞ 関数の $L^p(\mathbb{R}^d)$ での稠密性

次の定理が今回の主結果で，$L^p(\mathbb{R}^d)$ の関数は「ほぼ滑らかな関数」と思ってよいことを意味するものです．

定理

$p \in [1, \infty)$ に対して $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \{f : C^\infty$級かつある有界集合の外で $0\}$ は $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p)$ で稠密である．

実は $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \neq \{0\}$ ですら明らかなことではないのですが，これは（講義で扱うかはともかく）微積分の内容なので，ここでは認めて使います．

この定理を証明するための準備として，関数の新しい積を導入します．
可測関数 f, g に対して，積分

$$\int f(x-y)g(y)\mathrm{d}y = \int f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$$

が意味を持つときに $f * g(x)$ と書き，f と g の「畳み込み」または「合成積」と呼びます．第 2 回から使っている $P_r f$ は Poisson 核と f の畳み込みとして $P_r * f$ とも書けるので，すでに例は見ています．

Young の不等式

次の命題は畳み込みがいつ定義できるかの簡単な十分条件を与えます．

命題

$f \in L^1(\mathbb{R}^d), g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ならば $f * g$ はほとんど至るところで定義できて

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

これはまず $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ となる q をとって Hölder の不等式を上手に使えば

$$\begin{aligned}
\int |f(x-y)g(y)| \mathrm{d}y &= \int |f(x-y)|^{1/q} |f(x-y)|^{1/p} |g(y)| \mathrm{d}y \\
&\leq \left(\int |f(x-y)| \mathrm{d}y \right)^{1/q} \left(\int |f(x-y)||g(y)|^p \mathrm{d}y \right)^{1/p} \\
&= \|f\|_1^{1/q} \left(\int |f(x-y)||g(y)|^p \mathrm{d}y \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

となります．

Young の不等式と軟化子

この両辺を p 乗して積分し，非負関数に対する Fubini の定理を使えば

$$\begin{aligned}\int\left(\int|f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y\right)^p\mathrm{d}x &\le \|f\|_1^{p/q}\iint|f(x-y)||g(y)|^p\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &\le \|f\|_1^{1+p/q}\int|g(y)|^p\mathrm{d}y\end{aligned}$$

となって，ここで右辺は仮定から有限なので，とくに左辺の被積分関数 $\int|f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y$ はほとんど全ての x で有限です．さらに上の不等式の両辺を $1/p$ 乗すれば求める不等式が従います． □

とくに $f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d), g\in L^p(\mathbb{R}^d)$ に対して $f*g$ が定義できますが，これは f の良い性質を受け継ぎます（このように使ったときに f のことを軟化子と呼ぶことがあります）．

命題

$f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d), g\in L^p(\mathbb{R}^d)$ に対して $f*g$ は C^∞ 級である．

軟化子が関数を滑らかにすることの証明

命題を証明するために $|x| > R \Rightarrow f(x) = 0$ となる $R > 0$ をとります．このとき

$$\int \sup_{x' \in B(x,R)} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x' - y) \right| |g(y)| \mathrm{d}y \leq \sup_z \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(z) \right| \int_{B(x,2R)} |g(y)| \mathrm{d}y$$

と評価すると，$\frac{\partial f}{\partial x_k}$ はコンパクト集合上でのみ 0 でない連続関数なので有界で，従って $\sup_z |\frac{\partial f}{\partial x_k}(z)|$ は有限です．一方で Hölder の不等式を使って

$$\int_{B(x,2R)} |g(y)| \mathrm{d}y \leq \left(\int |g(y)|^p \mathrm{d}y \right)^{1/p} \left(\int 1_{B(x,R)} \mathrm{d}y \right)^{1/q}$$

とすると，これも仮定から有限です．これで項別微分定理の条件が確かめられたので，$\frac{\partial}{\partial x_k} f * g = \frac{\partial f}{\partial x_k} * g$ となって $f * g$ は x_k 偏微分可能です．$f \in C_{\mathsf{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)$ ならこの議論はどの方向の偏微分に対しても何回でも繰り返すことができるので，$f * g$ も C^∞ 級と分かります． □

$C_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$ が $L^p(\mathbb{R}^d)$ で稠密であることの証明

それではいよいよ $C_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$ が $L^p(\mathbb{R}^d)$ で稠密であることの証明をしましょう．まず $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ に対して，Lebesgue の収束定理によって

$$\int |g(x) - g(x)1_{B(0,m)}(x)|^p \mathrm{d}x \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

が分かるので，$B(0,m)$ の外で 0 である関数 $g_m = g1_{B(0,m)}$ は g の良い近似になっています．

次に $\varphi_n \in C_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$ を

(i) $\varphi_n \geq 0$, (ii) $\int \varphi_n(x)\mathrm{d}x = 1$, (iii) $B(0,1/n)$ の外では $\varphi_n = 0$

を満たすようにとります（そういう関数の存在は仮定します）．これを軟化子として用いると $\varphi_n * g_m$ は C^∞ 級です．さらに $|x| \geq m+1$ とすると，$\varphi_n(x-y)g_m(y)$ について $|y| \geq m$ なら $g_m(y) = 0$ であり，$|y| \leq m$ なら $|x-y| \geq 1$ なので $\varphi_n(x-y) = 0$ となります．従ってその積分である $\varphi_n * g_m(x)$ も 0 となります．これで $\varphi_n * g_m \in C_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$ が分かりました．

$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ が $L^p(\mathbb{R}^d)$ で稠密であることの証明

あとは $\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n * g_m - g_m\|_p = 0$ を示せば定理の証明が終わります．これは (ii) から $g_m(x) = \int g_m(x)\varphi_n(y)\mathrm{d}y$ となることと $\varphi_n * g_m = g_m * \varphi_n$ を思い出して，Young の不等式の証明と同様に考えれば

$$\begin{aligned}\|g_m * \varphi_n - g_m\|_p^p &= \int\left|\int (g_m(x-y) - g_m(x))\varphi_n(y)\mathrm{d}y\right|^p \mathrm{d}x \\ &\le \int\int |g_m(x-y) - g_m(x)|^p \varphi_n(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\left(\int \varphi_n(y)\mathrm{d}y\right)^{p/q}\end{aligned}$$

と評価できます．ここで再び $\int \varphi_n(y)\mathrm{d}y = 1$ であることと，非負関数に対する Fubini の定理を使えば，最後の式はさらに

$$\int\left(\int |g_m(x-y) - g_m(x)|^p \mathrm{d}x\right)\varphi_n(y)\mathrm{d}y \le \sup_{|y|\le 1/n}\|g_m(\cdot - y) - g_m\|_p^p$$

より小さいことがわかります．この右辺は補足資料の「平行移動の連続性」を使えば $n\to\infty$ で 0 に収束するので証明が終わります． $\square$

$C^\infty_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ が $L^p(-\pi,\pi)$ で稠密であることの証明

いま示した定理とほとんど同じ方法で次の定理も証明できます．

定理

$p\in[1,\infty)$ に対して $C^\infty_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ は $(L^p(-\pi,\pi),\|\cdot\|_p)$ で稠密である．

実際，この場合には考えている空間 $[-\pi,\pi]$ が有界なので「有界集合の外で 0」という条件は必要なくなります．そこで φ_n を Poisson 核 P_r に置き換えて議論すれば $P_r g = P_r * g$ が C^∞ 級であることが分かります．さらに級数表示

$$P_r g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\widehat{g}(n)e^{inx}$$

から，$P_r g$ は周期的であることも分かるので，すべての $k\geq 0$ に対して $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}P_r g$ も周期的で，従って $P_r g\in C^\infty_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ です．
$\lim_{r\nearrow 1}\|P_r * g - g\|_p = 0$ の証明は，第 2 回資料 7 ページの Poisson 核の性質が，今回の 7 ページの (i), (ii), (iii) とほとんど同じであることを使えば，前のページと全く同じです． $\square$

Fourier 級数の L^2 収束

いま示した定理が $C^m_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ でうまくいった Fourier 級数の一様収束の理論と，$L^2(-\pi,\pi)$ でうまくいった L^2 収束の理論を橋渡しします．

定理

$f \in L^2(-\pi,\pi)$ の Fourier 級数の部分和 $\sum_{n=-M}^{N} \widehat{f}(n)e_n$ は $M,N\to\infty$ で f に L^2 収束する．

前のページの定理により $f\in L^2(-\pi,\pi)$ に対して，$f_\varepsilon \in C^\infty_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ を $\|f-f_\varepsilon\|_2 \le \varepsilon$ となるようにとって，次のように評価します：

$$\begin{aligned}\left\|f-\sum_{n=-M}^{N}\widehat{f}(n)e_n\right\|_2 \le \|f-f_\varepsilon\|_2 &+ \left\|f_\varepsilon-\sum_{n=-M}^{N}\widehat{f_\varepsilon}(n)e_n\right\|_2 \\ &+ \left\|\sum_{n=-M}^{N}\widehat{f_\varepsilon}(n)e_n-\sum_{n=-M}^{N}\widehat{f}(n)e_n\right\|_2\end{aligned}$$

この第一項は f_ε の選び方から ε 以下であり，第二項も $f_\varepsilon\in C^2_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ に対する Fourier 級数が一様収束するので M,N を十分大きくとれば ε 以下にできます．

Fourier 級数の L^2 収束

最後に第三項は

$$\left\|\sum_{n=-M}^{N}\widehat{f_\varepsilon}(n)e_n-\sum_{n=-M}^{N}\widehat{f}(n)e_n\right\|_2=\left\|\sum_{n=-M}^{N}\widehat{(f-f_\varepsilon)}(n)e_n\right\|_2$$

と書き直せることに注意すれば，Bessel の不等式により全ての $N\in\mathbb{N}$ に対して $\|f-f_\varepsilon\|_2\leq\varepsilon$ 以下です．これで $\|f-\sum_{n=-M}^{N}\widehat{f}(n)e_n\|_2\leq 3\varepsilon$ となったので証明が終わりました． $\square$

ここでは今回の 9 ページの定理の使い方を見るために上のように証明しましたが，別のもっと短い証明もできます．第 5 回資料 2 ページで $\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)e_n$ がある $g\in L^2(-\pi,\pi)$ に収束して $\widehat{f}=\widehat{g}$ であることを述べました．これを確かめた人は，今回の 9 ページの証明の中の $\lim_{r\nearrow 1}\|P_rf-f\|_2=0$ を使うだけで

$$\widehat{f}=\widehat{g}\Longrightarrow f=g$$

が分かるので Fourier 級数の L^2 極限が f であることが分かります．