

前回の復習

前回は $f \in C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ の Fourier 級数が, $\|\cdot\|_2$ という新しい距離では必ず元の関数に収束することを示しました. 一方でこのように収束の意味を変えると, $1_{[-\pi/2, \pi/2]}$ のような不連続関数に対しても同じ収束が成り立つことが分かります (第3回8ページ参照). 従って $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ は自然な枠組みとは言えないということになっています.

さらに踏み込むと, $M < N$ に対する Fourier 部分和¹の差を考えると

$$\left\| \sum_{n=-M}^M \hat{f}(n)e_n - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e_n \right\|_2^2 = \sum_{M < |n| \leq N} |\hat{f}(n)|^2$$

ですが, ここで $\|f\|_2 < \infty$ でありさえすれば, Bessel の不等式によって $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$ なので, 右辺は $M, N \rightarrow \infty$ で0に収束します. 従って $\sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e_n$ は距離 $\|\cdot\|_2$ に関する Cauchy 列で, 何らかの極限に収束するのではないかと考えたくくなります.

¹見易さのために対称な和にしましたが, そうしなくても以下の議論は可能です.

関数空間 \mathcal{L}^p

この方向を追求するために、これから 2 回は少し一般化して測度空間 (X, \mathcal{F}, μ) の上で

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \left\{ f: f \text{ は可測}, \int |f(x)|^p \mu(dx) < \infty \right\}$$

という関数の空間のことを調べます。

よく知っている例は、まず μ が Lebesgue 測度の場合で、このときは μ の代わりに考えている集合を $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ のように書きます。もう一つは μ が計数測度の場合で、これは数列空間になるので記号も変えて

$$\ell^p(\mathbb{Z}) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}: \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^p < \infty \right\}$$

と書きます (集合 X としては \mathbb{Z} 以外を考えることもあります)。

$p = 2$ のときは $\|f\|_2 = \int |f|^2 d\mu$ が「距離」を定めるのでした。 $p = 1$ のときも $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$ が「距離」を定めることは簡単に確かめられます。

関数空間 \mathcal{L}^p — $1 < p < \infty$ —

他の $p \in (1, \infty)$ に対しても $\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$ と定めると同様の性質が成り立つのですが、その証明には少し準備が必要です。このためにまず次の補題を示します。

補題 (Young の不等式)

$p, q \in (1, \infty)$ が $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすときに、 $a, b \geq 0$ に対して

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

証明は簡単で、 \log が凹関数であることから

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) &\geq \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q \\ &= \log ab \end{aligned}$$

となつて、両辺を \exp に代入すれば示すべき不等式が従います。 □

Hölder の不等式

定理 (Hölder の不等式)

$p, q \in (1, \infty)$ が $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすときに, 任意の可測関数 f, g に対して,

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

これは $|f(x)|/\|f\|_p$, $|g(x)|/\|g\|_q$ に対して Young の不等式を使うことができ, その両辺を積分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int |fg| d\mu &\leq \frac{1}{p \|f\|_p^p} \int |f|^p d\mu + \frac{1}{q \|g\|_q^q} \int |g|^q d\mu \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

となります. 両辺に $\|f\|_p \|g\|_q$ を掛ければ主張が従います. □

とくに $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ なら $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ が分かります.

Minkowski の不等式

次の不等式が $\|\cdot\|_p$ が距離になるための条件の一つを示します。

定理 (Minkowski の不等式)

任意の $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ に対して, $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

これはまず

$$\int |f + g|^p d\mu \leq \int (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} d\mu$$

と変形します。次に $q = \frac{p}{p-1}$ として Hölder の不等式を使えば

$$\int |f||f + g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{(p-1)/p}$$

となり, $|g|$ の項も同様に評価すれば, 求める不等式を得ます。 □

とくに $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ なら $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ なので $\mathcal{L}^p(\mu)$ は線型空間です。

「距離」を距離にするために

2 ページで「距離」と「」をつけましたが、それは $\|\cdot\|_p$ が $\mathcal{L}^p(\mu)$ 上では多くの場合に距離にならないからです。実際距離の公理の一つとして、

$$\|f - g\|_p = 0 \implies f = g$$

がありますが、 $X = \mathbb{R}$ で μ が Lebesgue 測度の場合に $f = 1_{\{0\}}, g = 0$ とすれば $f \neq g$ であるにもかかわらず $\|f - g\|_p = 0$ となっています。

より一般に $f = g$ μ -a.e. であれば必ず $\|f - g\|_p = 0$ となり、逆も成り立ちます。従って $\|\cdot\|_p$ を距離にするには μ -a.e. で等しい関数は同じものと思わなければならない、そうすれば $\|\cdot\|_p$ は距離になります。

これを数学的に書けば、

$$f \sim g \stackrel{\text{def}}{\iff} f = g \text{ } \mu\text{-a.e.}$$

で同値関係を定めて、商空間 $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu) / \sim$ を考えるということです。

L^p 空間の感覚

$\|\cdot\|_p$ は $L^p(\mu)$ 上では距離になることが分かったわけですが、商空間を考えないといけないのは少し面倒です。例えば $f \in L^p(\mathbb{R})$ は関数ではなくその同値類なので、 $f(0)$ と書くことには意味がありません。しかしときどき特別に注意を要する場合があるだけで、普段は関数だと思っていても構いません。

さて、関数の大きさを測る新しい方法である $\|\cdot\|_p$ は p が大きいときには関数の値が大きいところを尊重し、 p が小さいときには関数の値が小さいところを尊重する性質があります。この辺りはいろいろな関数の大きさを測って試してみてください。

このうち p を大きくする方には際限がなく、その“極限”というべき概念もあるので、最後にそれを紹介します。

余裕があれば次のページに進む前に $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$ がどうなるか考えてみましょう。

$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$ は何か？

最も簡単なのは $f_1 = \sum_{n=1}^N a_n 1_{A_n}$ と書けている場合です。ここで A_n は可測で測度有限な集合とし、簡単のために $|a_1| < |a_2| < \dots < |a_N|$ とします。このとき

$$\|f_1\|_p^p = \sum_{n=1}^N |a_n|^p \mu(A_n)$$

と書けて、 $p \rightarrow \infty$ ではこの和の中で $|a_N|^p$ が他の項に比べて圧倒的に大きくなるので $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f_1\|_p = |a_N|$ となります。つまりこの場合は f の最大値になります。

f が \mathbb{R} 上で連続かつある有界集合の外で 0 である場合も（少し難しくなりますが）やはり $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$ は $\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ であることが分かります。ただ一般には、例えば $f_2 = 1_{\mathbb{Q}}$ を考えると全ての $p \in (1, \infty)$ で $\|f_2\|_p = 0$ となるので、 $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f_2\|_p \neq \max_{x \in \mathbb{R}} |f_2(x)|$ となります。ここでも μ -零集合は適当に除外して考えないといけないわけです。

L^∞ 空間

これを考慮に入れて、測度空間 (X, \mathcal{F}, μ) 上の実数値関数 f に対してその本質的上限を

$$\operatorname{esssup}_{x \in X} f(x) = \sup \{ b \in \mathbb{R} : \mu(\{x : f(x) \geq b\}) > 0 \}$$

と定め、 $\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}_{x \in X} |f(x)|$ とします。

このとき前のページの f_1 と f_2 に対して、 $\|f_1\|_\infty = |a_N|$, $\|f_2\|_\infty = 0$ となっていることや、 f が連続ならば $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ であることも簡単に確認できます。

そこで、関数空間を

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{ f : f \text{ は可測}, \|f\|_\infty < \infty \}$$

と定め、 μ -a.e. で等しい関数を同一視して $L^\infty(\mu) = \mathcal{L}^\infty(\mu) / \sim$ とすることで、これも距離空間になります。

ノルム の 概念

最後に後で抽象的な扱いをする時の準備として、 $\|\cdot\|_p$ の性質をまとめておきます：

- (1) $\|f\|_p \geq 0$ かつ等号成立は $f = 0$ に限る.
- (2) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.
- (3) 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して、 $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$.

このうち (1), (3) は資料では証明していません。各自で確かめてください。

一般に線型空間 L の上の実数値関数 $\|\cdot\|$ が上の三つの性質を満たしているときノルムといい、 $(L, \|\cdot\|)$ の組のことをノルム空間と言います。ノルム空間においては、前回 $\|\cdot\|_2$ に対して確かめたのと同じように (2) を使って

$$\|f - h\| \leq \|f - g\| + \|g - h\|$$

となるので、ノルムから自然に距離が定まります。