

前回の復習

前回は Abel 総和法を経由することによって、一般に連続関数に対しては $\hat{f} = \hat{g}$ ならば $f = g$ である（つまり Fourier 係数は関数を同定する）ことを示し、それを用いて $f \in C_{\text{per}}^2[-\pi, \pi]$ に対しては Fourier 展開

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

が絶対収束かつ一様収束の意味で成り立つことを示しました。

$f \in C_{\text{per}}^2[-\pi, \pi]$ の仮定はそう悪くありませんが、いろいろな意味で弱めることができます。今回はうち以下の二つを紹介します：

- ① $f \in C_{\text{per}}^1[-\pi, \pi]$ に対しても同じ意味で展開が成り立つ、
- ② $f \in C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ に対しても収束の意味を変えれば成り立つ。

この二つ目については、第 7 回までかけてさらに弱い仮定にできることを示します。

関数空間の幾何

二つの改良の鍵になるのは「関数空間の幾何」という考え方です。
 $f, g \in C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ に対して

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

と定めると、これは線型空間 $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ 上の内積になります¹。すると

- $\langle f, g \rangle = 0 \iff f$ と g は直交,
- $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2} \iff f$ の大きさ,
- $\arccos \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\|_2 \|g\|_2} \iff f$ と g のなす角度,

のようなことが考えられるようになります（ただし三つ目は f, g が $\mathbb{R}$ 値のときにしか普通の意味での角度にはなりません）。

¹内積の定義については線型代数の本か予備資料を参照。

関数空間の幾何

とくに $\mathbb{R}^3$ に通常の内積を入れた空間ではよく知っている

Schwarz の不等式 : $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$,

三角不等式 : $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$

などはそのまま成り立ちます。したがってとくに

$$\|f - g\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

は $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ 上の新しい距離を定めます (非退化性は要確認)。

ここで「新しい」と言ったのは、 $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ では別の距離

$$\|f - g\|_{\infty} = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - g(x)|$$

を考える方が自然だからです。この距離での収束は一様収束で、そのとき極限も $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ 内にあることは微積分で学んだ通りです。

Bessel の不等式

さて Fourier 展開に使った関数を $e_n(x) = e^{inx}$ と名付けると、第 1 回に見た通り $\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{m,n}$ だったので、ちょうど $\mathbb{R}^d$ における正規直交基底のようなものになっています (ただし $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は基底ではありません)。

すると $\langle f, e_n \rangle$ は「 f の e_n 成分」と思ってもよさそうです。例えば

$$\left\langle \sum_{n=-M}^N a_n e_n, \sum_{n=-M}^N b_n e_n \right\rangle = \sum_{n=-M}^N a_n \overline{b_n}$$

も $\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{m,n}$ を使って簡単に確かめられます。

この解釈から自然に見える次の不等式が重要な役割を果たします：

定理 (Bessel の不等式)

f が可積分ならば、任意の $M, N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left\| \sum_{n=-M}^N \hat{f}(n) e_n \right\|_2^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Bessel の不等式 —証明—

まず次のように展開します：

$$\begin{aligned} & \left\| f - \sum_{n=-M}^N \hat{f}(n) e_n \right\|_2^2 \\ &= \left\langle f - \sum_{n=-M}^N \hat{f}(n) e_n, f - \sum_{n=-M}^N \hat{f}(n) e_n \right\rangle \\ &= \|f\|_2^2 - 2\operatorname{Re} \left\langle f, \sum_{n=-M}^N \hat{f}(n) e_n \right\rangle + \left\| \sum_{n=-M}^N \hat{f}(n) e_n \right\|_2^2. \end{aligned}$$

この第2項は和と積分を交換してから $\langle f, e_n \rangle = \hat{f}(n)$ に注意すると、
 $\langle f, \sum_{n=-M}^N \hat{f}(n) e_n \rangle = \sum_{n=-M}^N |\hat{f}(n)|^2$ ですが、これは前のページで見た
ように $\left\| \sum_{n=-M}^N \hat{f}(n) e_n \right\|_2^2$ と一致します。

これを代入して整理すると、

$$\left\| f - \sum_{n=-M}^N \hat{f}(n) e_n \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \left\| \sum_{n=-M}^N \hat{f}(n) e_n \right\|_2^2$$

となって、左辺は非負なので求める不等式が示せました。



C^1 関数の Fourier 級数の一様収束

この不等式を使って、最初の目標である $f \in C^1_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ に対する Fourier 級数が絶対収束し、かつ f に一様収束することを示しましょう。第2回の5ページで指摘した通り、 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$ を示せば十分です。

第1回に示した $\hat{f}(n) = \frac{1}{in} \hat{f}'(n)$ と Schwarz の不等式を使うと

$$\sum_{n=-M}^N |\hat{f}(n)| \leq \left(\sum_{n=-M}^N \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-M}^N |\hat{f}'(n)|^2 \right)^{1/2}$$

となります（本当は $n = 0$ は除外する必要があります）。ここで $\frac{1}{n^2}$ の和は絶対収束するので問題ありません。一方で $f \in C^1_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ ならば $\|f'\|_2^2 < \infty$ であり、Bessel の不等式から

$$\sum_{n=-M}^N |\hat{f}'(n)|^2 \leq \|f'\|_2^2$$

なので、 $M, N \rightarrow \infty$ の極限をとれば絶対収束が分かります。

新しい距離での収束

次に二つ目の「収束の意味を変える」について考えます. $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ 上に内積を導入したことで, 新しい距離

$$\|f - g\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

が定まりました. そこでこの距離で Fourier 級数が f に収束するかという問題を考えることができますが, その答えは一様収束を考えたときより単純になります:

命題

任意の $f \in C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ に対して, $\left\| f - \sum_{n=-M}^N \hat{f}(n)e_n \right\|_2 \xrightarrow{M, N \rightarrow \infty} 0$.

ここで考えている距離は L^2 距離と呼ばれ, 次回以降にもっと一般的な設定で学ぶことになります.

Parseval の等式

Bessel の不等式の証明の最後で

$$(B) \quad \left\| f - \sum_{n=-M}^N \hat{f}(n) e_n \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \left\| \sum_{n=-M}^N \hat{f}(n) e_n \right\|_2^2$$

という等式が示されていますが、右辺の第2項は $\sum_{n=-M}^N |\hat{f}(n)|^2$ でした。従って前のページの命題を示すためには、次の等式を示せば十分であるということになります。

定理 (Parseval の等式)

任意の $f \in C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ に対して、 $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$ が成り立つ^a。

^a正項級数に関する主張になったので、初めから $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$ と書いています。
なお6ページの最後と同じ議論でこの和は収束することが分かります。

上の議論で (B) は等式なので、連続とは限らない関数 f に対しても $\sum_{n=-M}^N |\hat{f}(n)|^2 \xrightarrow{M, N \rightarrow \infty} \|f\|_2^2$ さえ確かめられれば命題の結論が成り立つことも分かります ($f = 1_{[-\pi/2, \pi/2]}$ などで試してみましょう)。

Parseval の等式の証明

第2回に証明した $P_r f \rightarrow f$ ($r \nearrow 1$) の一様収束を思い出しましょう.
このとき $|P_r f|^2 \rightarrow |f|^2$ ($r \nearrow 1$) も一様収束で成り立つので,

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \\ &= \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P_r f(x)|^2 dx \\ &= \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{inx} \right|^2 dx\end{aligned}$$

となります. ここで最後の行の被積分関数は展開して

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{inx} \right|^2 = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} r^{|m|+|n|} \widehat{f}(m) \overline{\widehat{f}(n)} e^{i(m-n)x}$$

と書き直すことができます².

²これは無限和の積なので自明ではありません. 必要なら補足資料を見てください.

Parseval の等式の証明

前のページの最後の行の二重級数は Weierstrass の判定法によって一様収束することが分かるので、積分と無限和の交換ができて、

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \lim_{r \nearrow 1} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} r^{|m|+|n|} \widehat{f}(m) \overline{\widehat{f}(n)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx \right) \\ &= \lim_{r \nearrow 1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{2|n|} |\widehat{f}(n)|^2\end{aligned}$$

を得ます。この最後の極限は単調収束定理によって和の中に入れることができ³、 $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$ となるので証明が終わります。□

Parseval の等式は「関数空間の幾何」という視点で見るとその意義がよく分かるのですが、そのためにはもう少し準備が必要です。第 6 回までがその準備で、第 7 回に Parseval の等式にもう一度触れます。

³定理の脚注に書いた $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 < \infty$ を先に確かめておけば、Lebesgue の収束定理を使うこともできます。

新しい収束に関する注意

7 ページの命題はしばしば $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n$ in $L^2(-\pi, \pi)$ と書かれます。しかし du Bois-Reymond の定理によって $f(0) \neq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n(0)$ となることがあるので、何かおかしいのではないかと感じる人もいるようです。

これは主に「新しい収束」に関する感覚がないことが原因なので、少し補足しておきます。まず上の等式には極限が隠れていて、普通の等式ではないことに注意が必要です。その上で $\|\cdot\|_2$ に関する収束がどんなものか少し見てみましょう。

- $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ が一様収束なら $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ も成立,
- $f_n = n^{1/3} 1_{(-1/n, 1/n)}$ とすると, $\|f_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ だが $f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$,
- $g_r = 1_{\{\{r\}, \{r\}+1/r\}}$ ($\{r\}$ は r の小数部分) とすると $\|g_r\|_2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ だが $\lim_{r \rightarrow \infty} g_r(x)$ は全ての $x \in [0, 1]$ で存在しない。

とくに二つ目の例を見れば、7 ページの命題と du Bois-Reymond の定理は問題なく両立することが分かります。

線型代数との関係に関する注意

今回示した展開 $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$ in $L^2(-\pi, \pi)$ は $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ の基底になっていることを意味しているように見えます.

しかしこれはこのままでは正しくありません. その理由は線型代数の本か予備資料で基底の定義を確認すれば分かりますが, 別の見方として $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ に一様収束の位相を入れた場合は, そもそも展開が成り立たない場合があるのでした. 線型空間の基底かどうかは代数的な構造だけで決まるはずなので, 位相によって結果が変わるはずはありません.

このように $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は基底のようであって基底でないものですが, それをどのように定式化するかはこの講義の第 11 回くらいで学ぶことになります. ちなみに “基底” かどうかは位相に依存すること自体は, 展開 $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$ が極限であることを思い出せば少しも不思議なことではありません. 極限は位相がなければそもそも考えることすらできないものです.