前回の復習

前回は $f\colon [-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ が可積分であって，

(F)
$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{inx}$$

が絶対収束の意味で成り立つならば，係数は

$$\widehat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\mathsf{d}x$$

でなければならないことと，$f\in C^2_{\mathsf{per}}[-\pi,\pi]$ ならば $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{inx}$ が絶対収束かつ一様収束することを見ました．しかしこのときに展開 (F) が成り立つかどうかは，まだ分からないのでした．

今回は少なくとも $f\in C^2_{\mathsf{per}}[-\pi,\pi]$ ならば $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{inx}$ の収束先が f であること，つまり展開 (F) が成り立つことを示します．またその過程で，より一般の関数に対して成立する近似定理も示します．

収束因子を使った近似

唐突ですが次のような手順での近似を考えます：

1. $0 < r < 1$ に対して，$P_r f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{inx}$ とする．
   （仮に $r = 1$ とすると $P_1 f$ は Fourier 級数です．）
2. $P_r f$ の $r \nearrow 1$ での極限を考える．

前回の $\widehat{f^{(m)}}$ と同様に，f が可積分でありさえすれば $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ は有界であることが分かります．従って $P_r f(x)$ を定める級数はいつでも絶対収束かつ一様収束します．このように $r^{|n|}$ は収束性を改良するもので，収束因子といいます．

すでに $f \in C^2_{\mathrm{per}}[-\pi, \pi]$ ならば $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}$ が絶対収束することを知っているので，収束因子が何の役に立つかは分かりにくいかも知れません．また収束因子をかけても，最後に $r \nearrow 1$ としてしまえば Fourier 級数に戻るだけではないかと思うかも知れません．

そう思う人は次のページに進む前に $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ と $\lim_{r\nearrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} r^n (-1)^n$ を比べてみると良いと思います．

Poisson の定理 —主張—

収束因子の方法は Fourier 級数に対しては非常に有効にはたらき，次の驚くような定理が成り立ちます：

定理 (Poisson)

全ての $f \in C_{\mathrm{per}}[-\pi, \pi]$ に対して，$P_r f \xrightarrow{r \nearrow 1} f$（一様収束）.

まず du Bois-Reymond の定理を思い出すと，全ての連続関数に対して上の極限が存在すること自体が驚きです．これはとくに $\lim_{r \nearrow 1} P_r f \neq P_1 f$ と言っているわけです．さらにただ収束するだけではなく，この定理では収束先がちゃんと元の関数 f になっていることまで分かっています．

補足：収束因子 $r^{|n|}$ を使う方法は Abel 総和法と呼ばれていて，他にも Cesàro 総和法などいろいろな変種があります．ここで P_r を使ったのは，おそらく皆さんが他のところでも出会うからです．$P_r f$ は f の Poisson 積分と呼ばれ，$z = re^{ix}$ によって単位円板内の関数と思うと調和関数になっています．上の定理は，この調和関数の “境界値” が f であると主張しているわけです．

Poisson の定理 —応用—

Poisson の定理の証明は少し長いので，まず応用として今回の目標である $f \in C^2_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ に対する Fourier 展開が成立することを示します．

Corollary

$f, g \in C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ に対し，全ての $n \in \mathbb{Z}$ で $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ ならば $f = g$．

証明は簡単で，仮定から任意の $r \in (0, 1)$ で $P_r f = P_r g$ となるので，$r \nearrow 1$ の極限をとって Poisson の定理を使えば $f = g$ が分かります． $\square$

Corollary

$f \in C^2_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ ならば $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}$ が，絶対収束かつ一様収束の意味で成立．

これも簡単で，Fourier 級数の収束だけは知っているので，とりあえず $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}$ とおくと，前回やったように両辺に e^{-inx} をかけて積分することで $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$ が分かります．従って上の系から $f = g$ となります．

Fourier 展開の成立条件について

前のページの証明から分かる通り，Fourier 展開が成立するための仮定は f の連続性と $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(n)|<\infty$ で十分です．しかし後者を f 自身の滑らかさなどの条件として書き換えるのは難しいようなので，ここでは $f\in C^2_{\mathsf{per}}[-\pi,\pi]$ という分かりやすい十分条件で定理を述べました．

一方で具体的な関数に対しては $\widehat{f}(n)$ を計算して絶対収束を証明することができる場合もあります．例えば $f(x)=x^2$ は $C^2_{\mathsf{per}}[-\pi,\pi]$ の関数ではありませんが，$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(n)|<\infty$ は簡単に確かめられます．これを使って $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ などを導いてみるのは面白い練習問題です．

ともかく「f が十分滑らかならば Fourier 展開は絶対収束かつ一様収束の意味で成り立つ」というのは，それなりに満足な結果です．

ただこの結果の証明を完成させるためには，もちろん Poisson の定理 $\lim_{r\nearrow 1}P_rf=f$ (一様収束)を証明しなければなりません．

Poisson の定理 —証明—

$\widehat{f}$ の定義を思い出すと $P_r f$ は

$$
\begin{aligned}
P_r f(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{inx} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|} f(y) e^{in(x-y)}\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

と書き直せます．仮定から f は有界なので，$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} f(y) e^{in(x-y)}$ は一様収束します．従って項別積分ができて，

$$
P_r f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(x-y)}\mathrm{d}y
$$

と書くことができます．この和を二つに分けて計算します：

$$
\sum_{n\geq 0} r^{|n|} e^{in(x-y)} = \frac{1}{1-re^{i(x-y)}}, \quad \sum_{n<0} r^{|n|} e^{in(x-y)} = \frac{re^{-i(x-y)}}{1-re^{-i(x-y)}}.
$$

Poisson の定理 —証明—

これらの和をとることで

$$P_r f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{1-r^2}{2\pi(1-2r\cos(x-y)+r^2)} \mathrm{d}y$$

となります．上の分数部分を Poisson 核といい，$P_r(x-y)$ と書きます．

次の補題が Poisson の定理の証明の鍵です．

補題 (Poisson 核は δ 測度の良い近似)

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)\mathrm{d}y = 1$,

(2) $\forall\delta > 0$, $\sup_{\delta\le|y|\le\pi} |P_r(y)| \to 0$ $(r \nearrow 1)$,

(3) $\forall y \in [-\pi,\pi]$, $P_r(y) > 0$.

“良い近似” の意味は証明を見れば分かると思います．“悪い近似” の例は Fourier 級数の対称な部分和を $\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{inx} = \int f(y)D_N(x-y)\mathrm{d}y$ と書いたときの D_N（Dirichlet 核）で，(2), (3) をみたしません．

Poisson の定理 —証明—

補題の証明は難しくありません．

(1) 積分を計算してもよいですが，

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot P_r(0-y)\mathrm{d}y = P_r 1(0)$$

と書いて，$P_r 1(0)$ の定義に $\widehat{1}(n) = \delta_{0,n}$ を代入しても分かります．

(2) $\delta \leq |y| \leq \pi$ に対して $\cos y \leq \cos \delta < 1$ なので，

$$\sup_{\delta \leq |y| \leq \pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos y + r^2} \leq \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2}$$

となって，右辺は $r \nearrow 1$ において 0 に収束します．

(3) 分子は正で，分母も計算の過程を思い出せば $|1 - re^{i(x-y)}|^2 > 0$ です．

$\square$

Poisson の定理 —証明—

この補題を使って定理を証明します．f を $\mathbb{R}$ に周期的に拡張して，周期関数のはどの周期で積分しても同じであることと，変数変換を用いて

$$
\begin{aligned}
P_r f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) P_r(x-y)\mathrm{d}y = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(y) P_r(x-y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) P_r(y)\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

と書き直します．ここで補題の (1) を使うと

$$
f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) P_r(y)\mathrm{d}y
$$

と書けるので，差をとって補題の (3) も使うと

$$
|P_r f(x) - f(x)| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)| P_r(y)\mathrm{d}y
$$

と評価できます．この右辺の積分を二つに分けて評価していきます．

Poisson の定理 —証明—

さて，いま f は有界閉区間上の連続関数なので一様連続，つまり

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \sup_{u,v:\ |u-v| \le \delta} |f(u) - f(v)| \le \varepsilon$$

です．従ってこの δ に対しては補題の (1), (3) を再び使って

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-y) - f(x)| P_r(y) \mathrm{d}y \le \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon P_r(y) \mathrm{d}y = \varepsilon$$

です（これは r に依りません）．一方で最大値の存在定理を使えば

$$\begin{aligned} &\int_{\delta \le |y| \le \pi} |f(x-y) - f(x)| P_r(y) \mathrm{d}y \\ &\le 2 \max_{z \in [-\pi, \pi]} |f(z)| \int_{\delta \le |y| \le \pi} P_r(y) \mathrm{d}y \end{aligned}$$

となって，これは補題の (2) から $r \nearrow 1$ で 0 に収束します．全ての議論は x に依っていないので，Poisson の定理の証明が終わりました． $\square$