Schwartz 関数の Fourier 変換の L^2 ノルム

今回は Fourier 変換を $L^2(\mathbb{R})$ で考えると良い性質があることを学びます．これは Fourier 級数の場合とよく似ていますが，$\mathbb{R}$ では $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ なので，$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して $\mathcal{F}f$ を直接定義することができません．

そこでまず $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ が L^2 関数として良い性質を持つことから始めます．Fubini の定理を何度か使うと

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{F}f\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int\left|\int f(y)e^{-iy\xi}\mathrm{d}y\right|^2\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\left(\int f(y)e^{-iy\xi}\mathrm{d}y\right)\left(\int \overline{f(z)}e^{iz\xi}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\xi \\
&= \int\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(y)e^{-iy\xi}\mathrm{d}y\right)e^{iz\xi}\mathrm{d}\xi\right)\overline{f(z)}\mathrm{d}z \\
&= \int\left(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(z)\right)\overline{f(z)}\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

ですが，$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ では反転公式が成り立つので $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(z) = f(z)$ です．

Fourier 変換は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上で L^2 ノルムを保存する

以上の議論で次の命題が示せました：

命題

任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$.

これは $\mathcal{F}$ が L^2 の幾何構造を保つという意味に解釈できますが，$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ で L^2 の幾何構造を考えるというのは自然とは言えません（例えば完備でない空間になるので）.

しかし実は次の補題が示すように $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $L^2(\mathbb{R})$ の中で十分大きい集合で，これと上の命題を合わせると $\mathcal{F}$ を自然に $L^2(\mathbb{R})$ まで拡張することができます.

補題

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $L^2(\mathbb{R})$ の中で稠密である.

これは $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \supset C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R})$ に注意すれば，第 6 回 3 ページの定理から直ちに分かります.

Fourier 変換の L^2 への拡張—存在—

この命題と補題を使って $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を $\overline{\mathcal{F}}\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ へ拡張しましょう．まず補題から任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であって

$$\|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

となるものがとれます．このとき命題を使うと

$$\|\mathcal{F}f_m - \mathcal{F}f_n\|_2 = \|f_m - f_n\|_2$$

なので，$(\mathcal{F}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\|\cdot\|_2$ に関して Cauchy 列であることが分かります．$L^2(\mathbb{R})$ は完備でしたから $\mathcal{F}f_n$ の極限が $L^2(\mathbb{R})$ の中に存在します．

この極限を $\overline{\mathcal{F}}f$ と定義したいところですが，いわゆる well-definedness の問題があります．これは $\overline{\mathcal{F}}f$ の定義が近似列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のとり方に依らないかという問題で，そうでなければ $\overline{\mathcal{F}}(f;(f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ などと書かなければいけないことになってしまいます．

Fourier 変換の L^2 への拡張—一意性—

そこで別の近似列 $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を

$$\|\tilde{f}_n - f\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

となるようにとってみます．すると再び命題を使って

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}\tilde{f}_n\|_2 &= \|f_n - \tilde{f}_n\|_2 \\ &\leq \|f_n - f\|_2 + \|f - \tilde{f}_n\|_2\end{aligned}$$

となってこの右辺は $n \to \infty$ で 0 に収束します．従って $\mathcal{F}f_n$ と $\mathcal{F}\tilde{f}_n$ は同じ極限に収束することが確かめられました．

さらに $\overline{\mathcal{F}}f$ の構成の仕方から

$$\|f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}f_n\|_2 = \|\overline{\mathcal{F}}f\|_2$$

なので $\overline{\mathcal{F}}\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ はノルムを保存するように拡張されています．

Fourier 変換の L^2 への拡張

以上で次の定理が示せました：

定理

$\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $\overline{\mathcal{F}}\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ に $\|\cdot\|_2$ を保つ写像として拡張できる．

ノルムを保つなら平行四辺形則から内積も保つので，拡張された $\overline{\mathcal{F}}\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ は内積空間としての構造を全く変えない写像です [1]．また逆変換についても同様に $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ に拡張できて，$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の近似列を使って

$$\overline{\mathcal{F}}^{-1}\overline{\mathcal{F}}f = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = f$$

とできるので，$\overline{\mathcal{F}}^{-1}$ は拡張された $\overline{\mathcal{F}}$ の逆写像になっています（この議論で well-definedness が役立っていることが分かるでしょうか？）．

[1] 拡張された $\overline{\mathcal{F}}$ は元の Fourier 変換と同じ式で定義できるとは限らないので違う記号を使っていますが，同じ記号を使う文献も多いので注意してください．

やや進んだ注—関数解析に向けて—

Fourier 変換を $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ から $L^2(\mathbb{R})$ に拡張した方法は，2 ページの命題から $\|\mathcal{F}f-\mathcal{F}g\|_2 \le \|f-g\|_2$ が導けることに注意すると，距離空間の一般論

「ある集合 S で一様連続な関数は，終域が完備なら，
その閉包 $\overline{S}$ まで一意的に連続に拡張できる」

の帰結です．これはあまり印象的ではなかったと思いますが，この講義に続くより進んだ関数解析ではほとんど日常的に使います．

例えば $C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)$ にノルム $\|f\|_{1,p}=\|f\|_p+\|\nabla f\|_p$ を入れ，これによる完備化を $H^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ とします．すると $C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $H^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ で稠密であって，∇ は $(C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{1,p})$ から $L^p(\mathbb{R}^d)^2$ への写像としては自明に一様連続なので，上と同様に $H^{1,p}(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ に拡張することができます．第 9 回の資料 3 ページで，超関数の意味で微分可能な $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ で $\|\nabla f\|_p < \infty$ を満たすものの全体 $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ を紹介しましたが，実はその空間は $H^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ と一致し，∇ の拡張が超関数の意味の ∇ と一致することも証明できます．

[2]ただしこれはこの講義とは違ってベクトル値関数の集合とします．

実際の計算のために—$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 以外での近似—

$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して，拡張された $\overline{\mathcal{F}}f$ を実際に計算するためには，近似関数列を $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に限らない方が便利な場合があります．例えば $f \in L^2(\mathbb{R})$ ならば全ての $n > 0$ に対して $f \cdot 1_{[-n,n]} \in L^1(\mathbb{R})$ であることに注意すると，広義積分として

$$\overline{\mathcal{F}}f(\xi) \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} f(y) e^{-iy\xi} \mathrm{d}y$$

となることを期待するのは自然ですし，微積分で慣れた方法で計算できる利点もあります．この計算が実際に $\overline{\mathcal{F}}f$ を与えることは次の命題で保証されます．

命題

$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ が $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$ を満たすならば，$\overline{\mathcal{F}}f = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}f_n$ である．

ただしこの最後の極限は $L^2(\mathbb{R})$ での収束であることを注意しておきます．そもそも $\mathcal{F}f$ は $L^2(\mathbb{R})$ の元として定義されているので，上に書いたような「ξ での値」には直接には意味がつきません．

Fourier 変換を広義積分として計算する例

前のページの命題の応用は，実は計算だけは既に行っていて，第 14 回の Lévy の反転公式の証明の中で

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\frac{e^{i(b-y)\xi}-e^{i(a-y)\xi}}{i\xi}\mathsf{d}\xi = 1_{(a,b)}(y)+\tfrac{1}{2}(1_{\{a\}}(y)+1_{\{b\}}(y))$$

を示しました．この左辺で $g(\xi)=\frac{e^{ib\xi}-e^{ia\xi}}{\sqrt{2\pi}i\xi}$ とおくと $g\in L^2(\mathbb{R})$ であって，上の式の左辺は $\overline{\mathcal{F}}^{-1}g(-y)$ を前のページの命題を使って求めたことになっています．

これは裏を返せば $g(\xi)=\overline{\mathcal{F}}1_{(a,b)}(-\xi)=\overline{\overline{\mathcal{F}}1_{(a,b)}(\xi)}$ ということで，従って Lévy の反転公式は $f\in L^2(\mathbb{R})$ に限れば $\langle f,1_{(a,b)}\rangle=\langle\overline{\mathcal{F}}f,\overline{\mathcal{F}}1_{(a,b)}\rangle$ という $\mathcal{F}$ が内積を保つという今回示した定理に帰着します．もちろん Lévy の反転公式は $f\in L^2(\mathbb{R})$ に限らず正しく，いつでもこういう説明ができるわけではありません．とくに f を測度まで拡張した場合は，ここで無視した $1_{\{a\}}+1_{\{b\}}$ が意味を持ってくる状況もあります．

Perseval の等式の拡張

7 ページの命題の証明の準備として，Perseval の等式を $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ まで拡張します．

補題

$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ に対して $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2$.

第 6 回に $L^p(\mathbb{R}^d)$ の関数を $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ で近似したときと同じように，$f_n = (f1_{(-n,n)}) * \varphi_n$（ただし φ_n は軟化子）とします[3]．どの $p \in [1,\infty)$ に対してもこの近似でよかったことを思い出すと，

$$\|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

となっています．とくに $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の列で f を $\|\cdot\|_2$ 近似しているので，拡張された Fourier 変換の定義から $\overline{\mathcal{F}}f = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}f_n$ in $\|\cdot\|_2$ です．

[3] そのときは $1_{(-m,m)}$ で遠方を切断しましたが，どちらでも変わらないことが簡単に確かめられます．

Perseval の等式の拡張

一方で $\|\cdot\|_1$ 近似列であることを使うと，任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{F}f_n(\xi) - \mathcal{F}f(\xi)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f_n(y) - f(y)| \mathrm{d}y \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

となります．

ここで前のページの結論と，第 5 回 7 ページに注意したように，L^2 収束列は概収束部分列を含むことを使うと，$\overline{\mathcal{F}}f = \mathcal{F}f$ がわかります．

これがわかれば，あとは $\overline{\mathcal{F}}$ がノルムを保つことから

$$
\|\mathcal{F}f\|_2 = \|\overline{\mathcal{F}}f\|_2 = \|f\|_2
$$

となって証明が終わります． $\square$

命題の証明

7 ページの命題を証明します．$f \in L^2(\mathbb{R})$ とし $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ の関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ を満たすとします．さらに稠密性を使って $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の関数列 $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，$\|f_n - \tilde{f}_n\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ を満たすようにとっておきます．このとき

$$\|f_n - \tilde{f}_n\|_2 \leq \|f_n - f\|_2 + \|f - \tilde{f}_n\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

であることに注意します．ここで 9 ページの補題を使って

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f\|_2 &\leq \|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}\tilde{f}_n\|_2 + \|\mathcal{F}\tilde{f}_n - \mathcal{F}f\|_2 \\ &= \|f_n - \tilde{f}_n\|_2 + \|\mathcal{F}\tilde{f}_n - \mathcal{F}f\|_2 \end{aligned}$$

と変形すれば，右辺において第一項は $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の取り方から，第二項は $L^2(\mathbb{R})$ 上の Fourier 変換の定義から，それぞれ $n \to \infty$ において 0 に収束します． □