

Dirichlet 積分

まず講義資料で使った $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = \pi$ の復習をしておきます (この後の反転公式の証明でも使うので). まず偶関数の積分なので, 積分区間は半分に分けて示せば十分です. Fubini の定理を使うと

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta &= \int_0^T \left(\int_0^\infty e^{-\eta t} dt \right) \operatorname{Im} e^{i\eta} d\eta \\ &= \int_0^\infty \int_0^T \operatorname{Im} e^{-\eta t + i\eta} d\eta dt \\ &= \int_0^\infty \operatorname{Im} \frac{1 - e^{-Tt + iT}}{t - i} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{t^2 + 1} (1 - e^{-Tt}(\cos T + i \sin T)) dt \end{aligned}$$

となり, $T \rightarrow \infty$ で $e^{-Tt}(\dots)$ の部分は 0 に一様収束するので, Lebesgue の収束定理を使えば上の積分は $\int_0^\infty \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi}{2}$ に収束します.

反転公式

Riemann–Lebesgue の補題を使うと、反転公式の総和法を使わない証明ができます。かなり技巧的ですが実解析らしい議論で、Fourier 級数のときに Dirichlet 核に全く触れなかったのを補うためにも紹介します。

定理

$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ に対して $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ であるならば、 f の連続点 x において $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x)$ が成り立つ。

上で $L^1(\mathbb{R})$ ではなく $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ と書いたのは、同値類をとると連続点が意味を持たなくなるからです。

「連続点 x において」は強い仮定ではありません。総和法を使えば $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = \lim_{t \rightarrow 0} H_t * f = f$ が L^1 収束として成り立つので、 $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f$ a.e. ですが、この左辺は可積分関数 $\mathcal{F}f$ の Fourier 逆変換として連続（講義資料最初の命題と同じ）です。従って定理の仮定の下では、全ての点で連続な代表元が存在します。

反転公式の証明

まず $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ なので Lebesgue の収束定理から

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \mathcal{F}f(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

です. $\mathcal{F}f$ を定義に従って積分で書いて, Fubini の定理と変数変換も使うと上の右辺に現れる積分は

$$\begin{aligned} \int f(y) \int_{-N}^N e^{i(x-y)\xi} d\xi dy &= 2 \int f(y) \frac{\sin(N(x-y))}{x-y} dy \\ &= 2 \int f(x-y) \frac{\sin(Ny)}{y} dy \end{aligned}$$

となります. ここで $|y| \geq M$ と $|y| < M$ に積分を分けると, まず

$$\left| \int_{|y| \geq M} f(x-y) \frac{\sin(Ny)}{y} dy \right| \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{M}$$

なので, こちらは $M \rightarrow \infty$ では無視できます.

反転公式の証明

残りの部分はさらに $\delta > 0$ を導入して

$$\int_{\delta \leq |y| < M} f(x-y) \frac{\sin(Ny)}{y} dy = 0$$

を考えると、この範囲で $\frac{f(x-y)}{y}$ は可積分なので Riemann–Lebesgue の補題から $N \rightarrow \infty$ で 0 に収束します。すると残るのは $|y| < \delta$ だけで、ここでは f の連続性から $f(x-y) \sim f(x)$ ($\delta \rightarrow 0$) とできるので、

$$\begin{aligned} \int_{|y| < \delta} f(x-y) \frac{\sin(Ny)}{y} dy &\sim f(x) \int_{|y| < \delta} \frac{\sin(Ny)}{y} dy \\ &= f(x) \int_{|y| < N\delta} \frac{\sin z}{z} dz \end{aligned}$$

この最後の積分が $N \rightarrow \infty$ で π に収束することを使うと

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \mathcal{F}f(\xi) e^{ix\xi} d\xi = f(x).$$

□