

Fourier 変換一定義の復習一

可積分関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ の Fourier 変換は

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(y)e^{-iy\xi} dy$$

で定義できるのでした．前回 Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ という都合の良いクラスで何ができるかを見ました．今回は定義できるギリギリの $L^1(\mathbb{R})$ で何が言えるかを見ます．

実際のところ可積分性の仮定だけで言えることは少ないのですが，そこからどうやって情報を得るかの技巧も紹介します．

可積分性と連続性

可積分から直ちに言えるのは次の連続性です。

命題

$f \in L^1(\mathbb{R})$ ならば $\mathcal{F}f \in C(\mathbb{R})$ である。

証明は

$$|\mathcal{F}f(\xi) - \mathcal{F}f(\eta)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(y)| |e^{-iy\xi} - e^{-iy\eta}| dy$$

で $\xi \rightarrow \eta$ として Lebesgue の収束定理を使うだけです。 □

次の結果は「反転公式の直接証明」にも使う基本的なものですが，証明は結構大変です。

補題 (Riemann–Lebesgue の補題)

$f \in L^1(\mathbb{R})$ ならば $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mathcal{F}f(\xi) = 0$ である。

Riemann–Lebesgue の補題の証明

基本的なアイデアは、 $\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(y)e^{-iy\xi}dy$ で $|\xi| \rightarrow \infty$ とすると $e^{-iy\xi}$ は非常に激しく振動するので正負の打ち消しあいが起こって積分値が消えるというものです．しかし一般の $f \in L^1(\mathbb{R})$ は、それ自身局所的にはいくらでも激しく振動する可能性があるので、このアイデアを直接証明にするのは困難です．そこでおとなしい関数での近似を使います．

第6回に示したように $C_c^\infty(\mathbb{R})$ は $L^1(\mathbb{R})$ で稠密です．従って任意の $\varepsilon > 0$ と $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して、 $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ を $\|f - f_\varepsilon\|_{L^1} < \varepsilon$ となるようにとることができます．このとき

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}f(\xi) - \mathcal{F}f_\varepsilon(\xi)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(y) - f_\varepsilon(y)| |e^{-iy\xi}| dy \\ &< \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

と Fourier 変換同士も近くなっています．

Riemann–Lebesgue の補題の証明

次に $\mathcal{F}f_\varepsilon(\xi)$ の積分を半分に分けて、片方の変数をずらすことで

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}f_\varepsilon(\xi)| &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left| \int f_\varepsilon(y) e^{-iy\xi} dy + \int f_\varepsilon\left(y + \frac{\pi}{\xi}\right) e^{-i\left(y + \frac{\pi}{\xi}\right)\xi} dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int \left| f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon\left(y + \frac{\pi}{\xi}\right) \right| dy \quad (e^{-i\pi} = -1) \end{aligned}$$

となります．いま f_ε はある有界集合を除いて 0 なので，積分もある有界閉区間 $[-N, N]$ に制限できます．さらに f_ε が一様連続であることに注意すると， $|\xi|$ が十分大きいときに

$$\begin{aligned} \int_{-N}^N \left| f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon\left(y + \frac{\pi}{\xi}\right) \right| dy &\leq 2N \sup_{y \in \mathbb{R}} \left| f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon\left(y + \frac{\pi}{\xi}\right) \right| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

とできて， $|\mathcal{F}f(\xi)| \leq |\mathcal{F}f(\xi) - \mathcal{F}f_\varepsilon(\xi)| + |\mathcal{F}f_\varepsilon(\xi)| < 2\varepsilon$ となります． $\square$

可積分関数の Fourier 変換

ここまでを示したことをまとめると以下の結論を得ます。

定理

$f \in L^1(\mathbb{R})$ ならば $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R})$ である。

これが最善の結果なのかどうか、とくに逆変換との関連では $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ とならないのか、は気になるところです。しかし以下の例が示すように $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ とは限りません：

$$\mathcal{F}1_{[-1,1]}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-iy\xi} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

従って $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して $\mathcal{F}f$ の逆変換は一般には定義できず、反転公式は直接には意味を持たないことが分かります。

こういう複雑な事情で前回は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ という空間で逆変換を考えました。ちなみに次回はもう少し広い $L^2(\mathbb{R})$ でもうまくいくことを見ます。

総和法による復元

しかし $\mathcal{F}^{-1}$ が直接定義できなくても, $\mathcal{F}f$ から f が復元できることは Fourier 級数の場合にも見た通りです. 今回も総和法

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{F}f(\xi) e^{-t|\xi|+ix\xi} d\xi = H_t * f(x)$$

を使うと次のことが示せます.

命題

$f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して $\lim_{t \rightarrow 0} H_t * f = f$ が L^1 収束の意味で成り立つ. とくに $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ が $\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$ を満たすなら $f = g$ である.

証明のために, $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ を $\|f_\varepsilon - f\|_{L^1} < \varepsilon$ となるようにとります. このとき

$$\|H_t * f - f\|_{L^1} \leq \|H_t * f - H_t * f_\varepsilon\|_{L^1} + \|H_t * f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^1} + \|f_\varepsilon - f\|_{L^1}$$

ですが, 第 6 回 4 ページの Young の不等式を使うと第一項は

$$\|H_t * (f - f_\varepsilon)\|_{L^1} \leq \|H_t\|_{L^1} \|f - f_\varepsilon\|_{L^1} < \varepsilon,$$

また第三項は f_ε のとり方から $< \varepsilon$ です.

総和法による復元

第二項は、 $\int H_t(y)dy = 1$ と $H_t \geq 0$ だったことを思い出して以下のように評価します：

$$\begin{aligned}\|H_t * f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^1} &= \int \left| \int (f_\varepsilon(x-y) - f_\varepsilon(x))H_t(y)dy \right| dx \\ &\leq \int \int |f_\varepsilon(x-y) - f_\varepsilon(x)|H_t(y)dydx.\end{aligned}$$

さらに $|y| \leq \delta$ と $|y| > \delta$ に分けて Fubini の定理を使うと

$$\int_{|y| \leq \delta} \left(\int |f_\varepsilon(x-y) - f_\varepsilon(x)|dx \right) H_t(y)dy + 2\|f_\varepsilon\|_1 \int_{|y| > \delta} H_t(y)dy$$

となります．この第一項の x に関する積分は Riemann–Lebesgue の補題の証明と同様に δ を小さくすればいくらでも小さくでき，一方で第二項は H_t の性質から $t \rightarrow 0$ で 0 に収束します．これで $\|H_t * f - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$) が示せました．□

証明の方法に関する補足

Riemann–Lebesgue の補題と総和法による復元定理の証明では、色々無駄なことをしています．まず Riemann–Lebesgue の補題に関して言えば、 $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ の Fourier 変換は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属することを前回示していて、そのことから直ちに $\mathcal{F}f_\varepsilon(\xi)$ が $|\xi| \rightarrow \infty$ で 0 に収束することがわかります．また、どちらの証明でも鍵になっていたのは

$$\|f_\varepsilon(\cdot - y) - f_\varepsilon\|_{L^1} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$$

という、関数の平行移動が $\|\cdot\|_{L^1}$ で連続であることですが、これは第 6 回の補足資料で一般の可積分関数に対して証明してあります（そしてこれを使って $C_c^\infty(\mathbb{R})$ の近似関数がとれることを証明したのでした）．

これらの非効率な方法を敢えて使ったのには理由があります．まず半周期ずらして打ち消し合いを作る方法は直観的にわかり易いし、wavelet など他の変換でも使える利点があります．また「 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ が $L^1(\mathbb{R})$ で稠密である」という事実は記憶しやすく汎用性が高いので、多くの本でこれを black box として使う傾向があります．従ってその使い方に慣れておくことには価値があります．

Lévy の反転公式

次に任意の区間での積分値を復元する別の方法を紹介します．これは Fourier 変換の対象を有限測度に拡張しても成り立つ利点があり，確率論で重要になります．右辺の積分の中に現れている分数項は $\overline{\mathcal{F}1_{(a,b)}}(\xi)$ で，その意味は次回わかります．

定理 (Lévy の反転公式)

任意の $f \in L^1(\mathbb{R})$ と $(a, b) \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{e^{ib\xi} - e^{ia\xi}}{\sqrt{2\pi}i\xi} \mathcal{F}f(\xi)d\xi$$

証明は，まず $\mathcal{F}$ の定義と Fubini の定理を使って以下のように変形します：

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{e^{ib\xi} - e^{ia\xi}}{\sqrt{2\pi}i\xi} \mathcal{F}f(\xi)d\xi \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int \int_{-N}^N \frac{e^{i(b-y)\xi} - e^{i(a-y)\xi}}{i\xi} d\xi f(y)dy. \end{aligned}$$

ここで $\int_{-N}^N \cdots d\xi$ を実部と虚部に分けて計算すると、実部は

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{-N}^N \frac{e^{i(b-y)\xi} - e^{i(a-y)\xi}}{i\xi} d\xi &= \int_{-N}^N \frac{\sin((b-y)\xi) - \sin((a-y)\xi)}{\xi} d\xi \\ &= \int_{-(b-y)N}^{(b-y)N} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta - \int_{-(a-y)N}^{(a-y)N} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2\pi 1_{(a,b)}(y) + \pi(1_{\{a\}}(y) \cdot +1_{\{b\}}(y)), \end{aligned}$$

ここで $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = \pi$ を使いました．一方で虚部は

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{-N}^N \frac{e^{i(b-y)\xi} - e^{i(a-y)\xi}}{i\xi} d\xi &= \int_{-N}^N \frac{\cos((a-y)\xi) - \cos((b-y)\xi)}{\xi} d\xi \\ &= 0 \quad (\text{奇関数の積分}). \end{aligned}$$

これらを前ページの最後の式に代入して Lebesgue の収束定理を使えば (優関数は各自で確認), 定理の左辺が得られます. □