Fourier 変換

関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ の Fourier 変換を

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iy\xi} \mathrm{d}y$$

で定義します（$\widehat{f}(\xi)$ と書くこともあります）．$|f(y)e^{-iy\xi}| = |f(y)|$ に注意すれば，この積分は $f \in L^1(\mathbb{R})$ なら定義できて $|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$ です．同様に $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ の Fourier 変換は

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-iy\cdot\xi} \mathrm{d}y$$

で定義されますが，この講義では主に $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ の場合を扱います[1]．

Fourier 変換の定義は $L^1(-\pi, \pi)$ での Fourier 係数とよく似ていますが，この時点で類似を追求しても理解の助けにはならないので，しません．

[1]多重偏微分の記号などが煩雑になるためです．議論はほとんど変わりません．

Schwartz の急減少関数

Fourier 変換のご利益は，畳み込みや微分と言った関数の操作が，

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi), \quad \mathcal{F}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\xi) = i\xi\mathcal{F}f(\xi)$$

のように，主に掛け算という簡単な操作に置き換えられることにあります．ただしこのような関係が意味を持つためには，$f * g$ や $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ が可積分である必要があります．こういう仮定をいちいち書くのは面倒なので，今回は次のような都合の良いクラスで議論を進めます．

定義 (Schwartz の急減少関数)

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ とは何回でも微分可能な関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ であって，任意の $m, n \geq 0$ に対して次を満たすものの集合とする [a]：

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1 + |x|)^m \left|\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x)\right| < \infty$$

[a] 標語的には「何回微分してもどんな多項式より速く減衰する関数」．

Schwartz 急減少関数の畳み込み，微分

命題

$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して $f * g$, $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ も $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属する.

まず $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ の方は定義から直ちに分かります．そして $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対しては $\|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\|_\infty < \infty$ かつ，ある $c > 0$ に対して $|g(x)| \leq c(1 + |x|)^{-2}$ なので，軟化子のときと同様に

$$\int \sup_{z\in\mathbb{R}} \left| \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(z-y)g(y) \right| \mathrm{d}y \leq \|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\|_\infty \int c(1+|y|)^{-2}\mathrm{d}y$$

$$< \infty$$

となり，微分と積分の順序交換と帰納法を使って $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f * g) = \left(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right) * g$ が分かります． $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ は既に示したので，$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ と $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (1 + |x|^m)|f * g(x)| < \infty$$

だけを示せばよいことになります.

ここで $|f(y)|, |g(y)| \le c(1+|y|)^{-m-2}$ となる $c>0$ をとると,

$$|y| \ge \tfrac{|x|}{2} \Rightarrow |f(x-y)g(y)| \le \|f\|_\infty c\big(1+\tfrac{|x|}{2}\big)^{-m}(1+|y|)^{-2},$$
$$|y| < \tfrac{|x|}{2} \Rightarrow |f(x-y)g(y)| \le c\big(1+\tfrac{|x|}{2}\big)^{-m}|g(y)|$$

となります．すると

$$\begin{aligned}|f*g(x)| &\le \int_{|y|\ge\frac{|x|}{2}} |f(x-y)g(y)|\mathsf{d}y + \int_{|y|<\frac{|x|}{2}} |f(x-y)g(y)|\mathsf{d}y \\ &\le c\big(1+\tfrac{|x|}{2}\big)^{-m}\int \|f\|_\infty(1+|y|)^{-2} + |g(y)|\mathsf{d}y\end{aligned}$$

となって，この最後の積分は有限なので証明が終わります． $\square$

畳み込みと Fourier 変換

定理

$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi)$.

この証明は簡単で，Fubini の定理を使って

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f * g(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint f(x-y)g(y)e^{-ix\xi}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x-y)e^{-i(x-y)\xi}\mathrm{d}x\right)g(y)e^{-iy\xi}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

と変形し，$x - y = z$ と変数変換すれば分かります． □

この証明には実は f, g がともに可積分であることしか必要ありません．
従ってそういう仮定のもとでも同じ結論が成り立ちます．

微分と Fourier 変換

定理

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して $\mathcal{F}\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}f(\xi)$.

これも簡単で，部分積分をすれば

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x)e^{-ix\xi}\right]_{-\infty}^{\infty} + i\xi\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

ですが，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ は遠方で 0 に収束するので，第一項は消えます．
後は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ だったことを思い出せば，帰納法で証明が完結します． □

この微分が多項式の掛け算に写るという性質は微分方程式への応用で重要です．偏微分方程式の講義で熱方程式を解くのに使ったと思います．

Fourier 変換は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に写す

Schwartz の関数空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ のとくに良い性質は，それが Fourier 変換で不変であることです．これは後で逆変換を考えるときに重要になります[2]．

命題

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ならば $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ である．つまり $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

証明は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の定義がよくできているので簡単です．実際，微分と積分の順序交換ができることを確かめることで，

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)^n \mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(y)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)^n e^{-iy\xi}\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(y)(-iy)^n e^{-iy\xi}\mathrm{d}y$$

がわかります．ここで $g_n(y) = f(y)(-iy)^n$ が $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属することが，好きな回数だけ微分して多項式をかけてみれば分かります．

[2] この性質はいわゆる超関数の理論でも重要になります．

するとまず $|\xi| \le 1$ に対しては

$$\sup_{|\xi|\le 1}(1+|\xi|)^m|(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\xi})^n\mathcal{F}f(\xi)| \le 2^m \sup_{|\xi|\le 1}|\mathcal{F}g_n(\xi)| \le 2^m \sup_{|\xi|\le 1}\|g_n\|_{L^1} < \infty$$

です．次に $|\xi| > 1$ に対しては，6 ページで示した定理から

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(y)(-iy)^n e^{-iy\xi}\mathsf{d}y = \mathcal{F}g_n(\xi) = (i\xi)^{-m}\mathcal{F}\tfrac{\mathsf{d}^m g_n}{\mathsf{d}\xi^m}(\xi)$$

であることを使うと

$$\sup_{|\xi|>1}(1+|\xi|)^m|(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\xi})^n\mathcal{F}f(\xi)| = \sup_{|\xi|>1}\frac{(1+|\xi|)^m}{|\xi|^m}|\mathcal{F}\tfrac{\mathsf{d}^m g_n}{\mathsf{d}\xi^m}(\xi)| \le \sup_{|\xi|>1}(1+\tfrac{1}{|\xi|})^m\|\tfrac{\mathsf{d}^m g_n}{\mathsf{d}\xi^m}\|_{L^1} < \infty$$

となって証明が終わります． $\square$

Fourier 逆変換

Fourier 変換によって畳み込みや微分は簡単な操作に置き換わりますが，偏微分方程式を解く場合などは元の関数に戻る方法も必要です．

関数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ の Fourier 逆変換を

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi$$

で定義します（逆写像の記号を使っていますが，そうなっていることはこの後証明します．また $\check{g}(x)$ と書くこともあります）．Fourier 変換と同様にこの積分は $g \in L^1(\mathbb{R})$ なら収束するので，とくに $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ なら $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)$ が定義できます．

定理 (反転公式)

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f) = f$ が成り立つ．とくに $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ は線型同型である．

反転公式の証明

Fourier 級数と同様に収束因子をかけて議論するのが簡単です[3]．まず $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ なので Lebesgue の収束定理から

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{F}f(\xi) e^{-t|\xi|+ix\xi} \mathrm{d}\xi$$

です．$\mathcal{F}f$ を定義に従って積分で書いて，Fubini の定理を使うと

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{F}f(\xi) e^{-t|\xi|+ix\xi} \mathrm{d}\xi \\
&\quad = \frac{1}{2\pi} \int f(y) \int_{-\infty}^{0} e^{t\xi+i(x-y)\xi} \mathrm{d}\xi + \int_0^{\infty} e^{-t\xi+i(x-y)\xi} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}y \\
&\quad = \int f(y) \frac{t}{\pi(t^2+(x-y)^2)} \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

となります．

[3]少し準備をすれば直接にもできるので，次回やります．

反転公式の証明

ここで $H_t(z) = \frac{t}{\pi(t^2+z^2)}$ は上半平面の Poisson 核と呼ばれているもので，次の性質を持ちます [4]：

- $\displaystyle\int H_t(z)\mathrm{d}z = 1$,
- 任意の $(t,z) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$ に対して $H_t(z) > 0$,
- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_{|z|\geq\varepsilon} H_t(z)\mathrm{d}z \to 0$.

これらの性質と $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ が有界であることを使うと，Fourier 級数のときと全く同じ議論で

$$\int f(y)\frac{t}{\pi(t^2+(x-y)^2)}\mathrm{d}y \xrightarrow{t\to 0} f(x)$$

が分かります．これで各点収束の意味で反転公式が示せました． □

（上では $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f$ だけ考えましたが $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f$ も同じです．）

[4] Fourier 級数で出てきたのは，実は単位円板の Poisson 核と呼ばれるものです．

総和法について補足

気づいている人も多いと思いますが，$e^{-t|\xi|}$ はもちろん Fourier 級数のときの $r^{|n|}$ の類似です．総和法には色々あって，Fourier 変換に対しては $e^{-t\xi^2}$ を収束因子に使う Gauss 総和法を使うことが多いようです．この場合は 10 ページでの議論で

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{-t\xi^2+i(x-y)\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4t}\right\}$$

を使うことになり，この右辺は Gauss 核と呼ばれています．この事実の証明に複素関数論の知識が必要で，初等的ではないのでこの講義では避けましたが，この方法は高次元への拡張が容易であるという利点があります．Poisson 核の方法を高次元に拡張することは可能ですが，それには結局複素関数論の知識が必要になります．

Gauss 核を使った多次元での総和法に興味があれば，参考書に挙げた黒田成俊「関数解析」を見てください．

Schwartz 空間の距離空間としての構造

Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は関数空間なので，Banach 空間や Hilbert 空間になっていないかと問うのは自然なことです．この空間には可算無限濃度のノルムの族

$$\|f\|_{k,l} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{|x|^k\left|\frac{\mathrm{d}^l f}{\mathrm{d}x^l}(x)\right|\right\},\quad k,l\geq 0$$

が定まっていて，もし $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ が全てのノルムで Cauchy 列であれば，ある $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に収束することを証明することができます．

しかしこの収束を一つのノルムで捉えることはできません．例えば安直に $\|f\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}=\sum_{k,l\geq 0}\frac{\|f\|_{k,l}}{2^{k+l}}$ のようにすると，定義されている限りは良さそうですが，$\|f\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}=\infty$ となる $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ が見つかります．代わりに以下のように距離を定めると完備な距離空間にはすることができます：

$$d(f,g)=\sum_{k,l\geq 0}\frac{\|f-g\|_{k,l}}{2^{k+l}(1+\|f-g\|_{k,l})}.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は Fréchet 空間と呼ばれるものの一例になっています．