

直交多項式

今回は完全正規直交系の実例の紹介で、まずは直交多項式から始めます。区間 $[-1, 1]$ 上では $\text{span}(\{x^n\}_{n \geq 0})$ は Weierstrass の多項式近似定理により $(C[-1, 1], \|\cdot\|_\infty)$ で稠密で、従って $(L^2[-1, 1], \|\cdot\|_2)$ でも稠密です（今回は係数体を $\mathbb{R}$ とします）。

すると $\{x^n\}_{n \geq 0}$ に Gram-Schmidt の直交化を行って得られる正規直交系 $\{P_n\}_{n \geq 0}$ から生成される部分空間 $\text{span}(\{P_n\}_{n \geq 0})$ も $(L^2[-1, 1], \|\cdot\|_2)$ で稠密なので、これは完全正規直交系です。 P_n は Legendre 多項式と呼ばれており、量子力学で水素原子における電子の波動関数を求める際に出会った人もいます。最初の幾つかを書いておくと

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & P_1(x) &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, & P_2(x) &= \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5x^3 - 3x), & P_4(x) &= \frac{3}{8\sqrt{2}}(35x^4 - 30x^2 + 3). \end{aligned}$$

今回の前半は、多項式からなる完全正規直交系に特有の性質を少しだけ紹介します。

三項間漸化式

直交多項式はある漸化式を満たします．これを見るため， $xP_n(x)$ が $(n+1)$ 次多項式であることに注意して， $\{P_m\}_{m=0}^{n+1}$ の線型結合で

$$xP_n(x) = \sum_{m=0}^{n+1} \alpha_{n,m} P_m(x)$$

と表します．ここで P_n が

$$\text{span}(\{P_m\}_{m=0}^{n-1}) = \{(n-1) \text{ 次以下の多項式} \}$$

と直交することを使うと，上の両辺と P_m ($m = 0, 1, \dots, n-2$) の内積について $\langle xP_n, P_m \rangle = \langle P_n, xP_m \rangle = 0$ が分かります．従って

$$(D) \quad xP_n = \alpha_{n,n+1}P_{n+1} + \alpha_{n,n}P_n + \alpha_{n,n-1}P_{n-1}$$

と三つの項だけが残ります（ただし $\alpha_{0,-1} = 0$ です）．

漸化式の係数

係数を完全に決めるのは大変ですが、(D) の両辺と P_{n+1}, P_{n-1} の内積をとれば

$$\alpha_{n,n+1} = \langle xP_n, P_{n+1} \rangle, \quad \alpha_{n,n-1} = \langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \langle xP_{n-1}, P_n \rangle$$

なので、 $\alpha_{n,n-1} = \alpha_{n-1,n} = \mu_{n-1}/\mu_n$ です¹。最後に $\alpha_{n,n} = \langle xP_n, P_n \rangle$ は一般にはこれ以上計算しようがありませんが、実は Legendre 多項式の場合は P_n^2 が偶関数になるので 0 になります。

Legendre 多項式は文献では $P_n(1) = 1$ と規格化することが多いのですが、このとき正規直交系にはならないので、参照する際には注意してください。一つの理由は、このように規格化すると漸化式が

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0$$

と単純な形になることだと思います（証明は大変なのでしません）。

¹ここまでは Legendre 多項式に限らず、一般の直交多項式に対して成り立つ議論です。

Christoffel–Darboux の公式

直交多項式を使って一般化 Fourier 展開をしようとするれば

$$\sum_{m=0}^n \langle v, P_m \rangle P_m(x) = \int_{-1}^1 v(y) \sum_{m=0}^n P_m(y) P_m(x) dy$$

を考えることになりましたが、漸化式 (D) を使うと簡単な表示になります。

定理 (Christoffel–Darboux の公式)

$$\sum_{m=0}^n P_m(x) P_m(y) = \alpha_{n,n+1} \frac{P_{n+1}(x) P_n(y) - P_n(x) P_{n+1}(y)}{x - y}.$$

証明は、まず漸化式 (D) と $\alpha_{m,m-1} = \alpha_{m-1,m}$ を使って

$$\begin{aligned} (x - y) P_m(x) P_m(y) &= \alpha_{m,m+1} (P_{m+1}(x) P_m(y) - P_m(x) P_{m+1}(y)) \\ &\quad - \alpha_{m-1,m} (P_m(x) P_{m-1}(y) - P_{m-1}(x) P_m(y)) \end{aligned}$$

と変形します。

Christoffel–Darboux の公式の証明

この両辺の和をとれば，最初と最後の項以外が消える形になっているので， $\alpha_{-1,0} = 0$ を思い出すと最初の項も消えて

$$(x - y) \sum_{m=0}^n P_m(x)P_m(y) = \alpha_{n,n+1}(P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y))$$

となります．両辺を $x - y$ で割って，結論の公式を得ます．



直交多項式は，現代的な関数解析が発展するよりずっと以前から古典解析の範疇で詳しく研究されてきたものです．微分方程式の固有関数としての側面や，零点の分布など，より進んだ話題については例えば「実関数と Fourier 解析」（高橋陽一郎）が出発点として良いと思います．

区間の分割から定まる部分空間

次に直交多項式とは異なる重要な完全正規直交系を紹介するため、 $L^2[0, 1)$ のちょっと変わった部分空間の列を導入します。 $[0, 1)$ の分割 $\{[2^{-n}(k-1), 2^{-n}k): 1 \leq k \leq 2^n\}$ が生成する σ 加法族を $\mathcal{B}_n$ とします²。 $[0, 1)$ の Borel σ 加法族を $\mathcal{B}$ とすると、全ての n で $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}$ なので、

$$H_n = L^2([0, 1), \mathcal{B}_n, dx) \subset L^2([0, 1), \mathcal{B}, dx) = H$$

です。さらに H_n は $\|\cdot\|_2$ で完備なので H の閉部分空間になっています。

このとき第 10 回の 9 ページで示したように、直交射影 $P_n: H \rightarrow H_n$ が存在します。この直交射影による f の像 $P_n f$ は、言葉で言えば

分割の各区間 $[2^{-n}(k-1), 2^{-n}k)$ の上では定数である
ような関数で、 f を最も良く $\|\cdot\|_2$ 近似するもの

ということになっています。

² σ 加法族と言っても有限個の区間から生成されているので、単に長さ 2^{-n} の区間の有限和で書けるものしか入っていません。

$H_n = L^2([0, 1], \mathcal{B}_n, dx)$ への直交射影

ここで H_n は有限次元の線型空間であって、

$$\{\varphi_{n,k} = 2^{n/2} 1_{[2^{-n}(k-1), 2^{-n}k)} : 1 \leq k \leq 2^n\}$$

がその正規直交基底であることが簡単に分かるので、直交射影は具体的に

$$\begin{aligned} P_n f(x) &= \sum_{k=1}^{2^n} \langle f, \varphi_{n,k} \rangle \varphi_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{2^n} \left(2^n \int_{2^{-n}(k-1)}^{2^{-n}k} f(y) dy \right) 1_{[2^{-n}(k-1), 2^{-n}k)}(x) \end{aligned}$$

と書けます。これはつまり分割の各区間ごとに平均をとったことになっています。この解釈を使って、次の命題が示せます。

命題

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ は H で $\|\cdot\|_2$ に関して稠密である。

命題の証明

まず $f \in H$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $f_\varepsilon \in C[0, 1]$ を $\|f - f_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon$ となるようにとれます (第6回9ページの定理).

次に有界閉区間上の連続関数は一様連続なので, n を十分大きくとれば $|x - y| \leq 2^{-n} \Rightarrow |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| \leq \varepsilon$ とできます. このとき $x \in [2^{-n}(k-1), 2^{-n}k]$ となる k をとれば,

$$|f_\varepsilon(x) - P_n f_\varepsilon(x)| \leq 2^n \int_{2^{-n}(k-1)}^{2^{-n}k} |f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon(x)| dy \leq \varepsilon$$

なので, $\|f_\varepsilon - P_n f_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon$ が分かります.

二つの不等式を合わせると

$$\|f - P_n f_\varepsilon\|_2 \leq \|f - f_\varepsilon\|_2 + \|f_\varepsilon - P_n f_\varepsilon\|_2 \leq 2\varepsilon$$

となって, $f \in H$ が $P_n f_\varepsilon \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ で近似できました. □

$\{\varphi_{n,k}: n \geq 0, 1 \leq k \leq 2^n\}$ の正規直交化

いま示した命題から、 $\{\varphi_{n,k}: n \geq 0, 1 \leq k \leq 2^n\}$ を正規直交化すれば、 H の完全正規直交系が得られます。まず $\varphi_{0,1} = 1$ はそのままにして、 $\varphi_{1,1}$ に Gram-Schmidt の方法を使うと $\psi_{1,1} = 1_{[0,1/2)} - 1_{[1/2,1)}$ が分かります。そして $\varphi_{1,2} = \varphi_{0,1} - \psi_{1,1}$ なので、これは使いません。

次に $\varphi_{2,k}$ ($1 \leq k \leq 4$) を考えるときは $H_1 = \text{span}\{\varphi_{0,1}, \psi_{1,1}\}$ と直交すればよいのですが、元の基底 $\{\varphi_{1,k}: k = 1, 2\}$ と直交させると考えるのが簡単です。そうすると例えば $\varphi_{2,1}$ については、元々すべての $x \in [0, 1)$ で $\varphi_{2,1}(x)\varphi_{1,2}(x) = 0$ となっているので、 $\varphi_{1,1}$ と直交するようにすればよく、それは上と全く同様に

$$\psi_{2,1} = \sqrt{2}(1_{[0,1/4)} - 1_{[1/4,1/2)})$$

です。以下 $\varphi_{2,2} = \sqrt{2}\varphi_{1,1} - \tilde{\varphi}_{2,1}$ はとばして、 $\varphi_{2,3}$ は $\varphi_{1,2}$ と直交するように、と進めていくと、同じ議論を長さが半分の区間で繰り返すだけになります。

Haar 関数系

こうして $\psi_{0,1} = 1$ とし, $n \geq 1$ と $1 \leq k \leq 2^n$ に対しては

$$\psi_{n,k} = 2^{n/2} (1_{[2^{-n}(k-1), 2^{-n}(k-1/2))} - 1_{[2^{-n}(k-1/2), 2^{-n}k)})$$

とすることで $L^2[0, 1)$ の完全正規直交系が得られます. この関数系は Haar 関数系と呼ばれており, いわゆるウェーブレットの理論の出発点になるものです.

ついでに途中で出てきた P_n の確率論的な解釈についても補足しておきます. 確率論において (部分) σ 加法族は「手元にある情報の量」または「測定の可能な精度」を表します. $P_n f$ は各 2^{-n} の区間での f の平均値という情報だけが与えられたときに, f を最も良く近似する関数でしたが, さらに全ての $B \in \mathcal{B}_n$ に対して $\int_B f(x)dx = \int_B P_n f(x)dx$ が成り立つことも容易に分かります. つまり $\mathcal{B}_n$ 以上の精度を気にしないのであれば, $P_n f$ が f の代わりになるということです. このような性質をもつ関数を f の $\mathcal{B}_n$ に関する条件付き期待値といいます.