

正規直交系と Bessel の不等式

Hilbert 空間 $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の部分集合 E が,

$$(1) \forall e \in E \text{ について } \|e\| = 1, \quad (2) \forall e, e' \in E, e \neq e' \text{ について } e \perp e'$$

を満たすときに E は正規直交系というのでした。典型例は $L^2(-\pi, \pi)$ における $e_n(x) = e^{inx}$ の全体 $E = \{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ で、これは Schauder 基底にもなっているのです。

以下は正規直交系に対する、基本的ですが有用な結果です。

命題 (Bessel の不等式)

上の設定で任意の有限部分集合 $E_0 \subset E$ と $v \in H$ に対して次が成り立つ：

$$\left\| \sum_{e \in E_0} \langle v, e \rangle e \right\| \leq \|v\|.$$

証明は Fourier 級数の場合と全く同じです (確認してください)。

正規直交系の完全性

今回は正規直交系がいつ「無限次元ノルム空間の基底 = Schauder 基底」になるかを考えます。ただし議論の簡略化のため、Hilbert 空間はしばらく可分と仮定します¹。このとき正規直交系 E は存在すれば高々可算濃度になりますので、以下 $E = \{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ という場合だけを考えます。

Fourier 展開を議論した時には、「全ての $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n) \Leftrightarrow f = g$ 」という性質を何度か使いました。これは一般の Hilbert 空間でも重要な性質になるので、名前がついています。

定義

Hilbert 空間 H の正規直交系 E が完全であるとは、 $v \in H$ が全ての E の元と直交するならば $v = 0$ であることをいう^a。

^a前回の記号を使って短く書けば「 E が完全 $\stackrel{\text{def}}{\iff} E^\perp = \{0\}$ 」です。

¹可分でない Hilbert 空間に出会うことは滅多にないと思います。全くないというわけではないので、補足資料に一つだけ例を挙げます。

完全正規直交系による一般化 Fourier 展開

正規直交系の完全性は、一般の可分な Hilbert 空間での Fourier 展開の類似と以下のように結びついています。

定理

Hilbert 空間 H の正規直交系 $E = \{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が完全であることは、次の展開が成立することと同値である^a：

$$(F) \quad v = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle v, e_n \rangle e_n.$$

^aそろそろ慣れてきたことを期待して、サボった書き方をしますが、もちろん右辺は極限で等号はノルム収束の意味で理解します。

まず E が完全ならば部分和 $S_N = \sum_{n=-N}^N \langle v, e_n \rangle e_n$ が v に収束することを示しましょう。これも Fourier 級数と同じで、まず S_N は Bessel の不等式から Cauchy 列であることが分かります (第 4 回 1 ページ)。いま H は Hilbert 空間で、とくに完備ですから $S_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ が存在します。

完全正規直交系による一般化 Fourier 展開

この S_∞ について、内積のノルム収束に関する連続性（第7回のレポート課題へのヒント）から任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\langle S_\infty, e_n \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N, e_n \rangle = \langle v, e_n \rangle$$

となるので、とくに $\langle S_\infty - v, e_n \rangle = 0$ です。ここで仮定されていた完全性を使うと $S_\infty - v = 0$ でなければならないことが分かります。

正規直交系に関する展開 (F) が成り立つときに $E = \{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が完全であることは、ほとんど明らかです。実際 $v \perp E$ ならば、展開 (F) の係数が全て0になってしまうので、 $v = 0$ となるしかありません。□

ところで Fourier 級数の L^2 理論を思い出すと、正規直交系の完全性は一般には確かめるのが難しい性質であることが分かります。実際そこでは $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ が $L^2(-\pi, \pi)$ で稠密であるという難しい結果を使ったのでした。

完全性と生成する部分空間の稠密性

いま示した定理から、完全正規直交系 E の生成する部分空間 $\text{span}(E)$ は H で稠密であることが分かります。逆に E の生成する部分空間 $\text{span}(E)$ が H で稠密ならば、 E は完全であることも分かります。

実際 $v \in H$ が E の全ての元と直交するなら、部分空間 $\text{span}(E)$ と直交します。ここで $\text{span}(E)$ が H で稠密なら

$$\left\| v - \sum_{k=1}^K \alpha_k e_k \right\| \leq \frac{1}{2} \|v\|$$

とできますが、このとき

$$\begin{aligned} 0 &= \left| \left\langle v, \sum_{k=1}^K \alpha_k e_k \right\rangle \right| \\ &= \left| \|v\|^2 - \left\langle v, v - \sum_{k=1}^K \alpha_k e_k \right\rangle \right| \\ &\geq \|v\|^2 - \frac{1}{2} \|v\|^2 \end{aligned}$$

となるので、 $v = 0$ であるしかありません。

Gram-Schmidt の正規直交化法

完全正規直交系は、ある意味で有限次元のときの基底の代わりになる有用なものです。従ってその存在を知ることには意味があります。

命題

可分な Hilbert 空間は可算濃度の完全正規直交系 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を含む。

これを示すためには、まず可分性を使って可算濃度の稠密集合 $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を選びます。あとは Gram-Schmidt の直交化と呼ばれている方法で、

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, \quad e_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle u_{n+1}, e_k \rangle e_k}{\|u_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle u_{n+1}, e_k \rangle e_k\|}.$$

のように定めれば²、 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は正規直交系であり、 $\text{span}(\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ は $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を含むので H で稠密です。従って前のページで示したことから完全性が分かります。

² e_{n+1} の分子が 0 になるときは、その u_{n+1} はとばします。

可分とは限らない場合

ここから少しだけ、可分とは限らない Hilbert 空間の場合に触れます。この場合は完全正規直交系があるとすれば非可算濃度になるので、一般化 Fourier 展開のようにその和を考えることは容易ではありません³。

一方で Hilbert 空間 H が可分でなくても、次の同値性はとくに修正せずに意味を持ち、実際に成り立ちます。

定理

正規直交系 E が完全であることと、 E の生成する部分空間 $\text{span}(E)$ が H で稠密であることは同値である。

この定理のうち「 $\text{span}(E)$ が H で稠密 $\Rightarrow E$ が完全」は 5 ページの証明がそのまま通用します（確認してください）。

逆の証明は前回学んだことの復習としてちょうど良いので、次のページに述べます。

³しかるべき意味で類似の表現はありますが、あまり扱い易いものではないので、自習に任せます。

「 E が完全 $\Rightarrow \overline{\text{span}(E)}$ が H で稠密」の証明

$v \in H$ を任意にとって固定します. $\overline{\text{span}(E)} = F$ は閉部分空間なので、前回示したように直交射影 $P_F v$ が存在します. さらに前回資料の 9 ページに述べたように $v - P_F v$ は $F \supset E$ の全ての元と直交するので、 E の完全性の仮定から 0 になります. これで

$$v = P_F v \in F$$

がわかったので、すべての $v \in H$ が F に含まれることが示せました. $\square$

ここでは直接的な証明をしましたが、対偶をとって「稠密でない $\Rightarrow$ 完全でない」を示す方が分かり易い人もいると思います. 「閉集合とその外の点の距離は正」という事実と $P_{\overline{\text{span}(E)}} v$ の定義である

$$\|v - P_{\overline{\text{span}(E)}} v\| = \text{dist}(v, \overline{\text{span}(E)})$$

を使って挑戦してみてください.