完備な内積空間

線型空間 V に内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が備わっているときは，$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ $(v \in V)$ でノルムを定めることができるのでした．完備な内積空間にも名前がついています：

定義

内積線型空間 $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ がノルム $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ $(v \in H)$ に関して完備であるとき Hilbert 空間という [a]．

[a] 線型空間の記号を変えたのは，単に気分の問題です．

例えば $L^2(\mu)$ は内積空間であって，第 5 回に証明したように完備なので Hilbert 空間です．他に前回触れた「超関数の意味で微分可能で $\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ となる $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ の全体」も

$$\langle f, g \rangle_{H^1} = \langle f, g \rangle_{L^2} + \langle \nabla f, \nabla g \rangle_{L^2}$$

を内積として Hilbert 空間になります（完備性の証明は結構大変です）．

内積空間の幾何

線型空間 V に内積が定まっていると，それに応じて Euclid 空間の場合と全く同様に幾何構造を定めることができます．例えば

- $\langle u, v \rangle = 0 \iff u$ と v は直交 ($u \perp v$)
- $\forall v \in A \subset V$, $\langle u, v \rangle = 0 \iff u$ と A は直交 ($u \perp A$)
- $\frac{\langle u,v \rangle v}{\|v\|^2}$ は u の v 方向成分（または直交射影）
- $\arccos \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\|\|v\|}$ は u と v のなす角（これは実線型空間の場合）

などが定義できます．

このうち直交性はこの後で何度も出てきます．とくに V の部分集合 E が,

$$(1)\, \forall e \in E \text{ について } \|e\| = 1, \quad (2)\, \forall e, e' \in E, e \neq e' \text{ について } e \perp e'$$

を満たすときに E は正規直交系であるといいます．例えば $L^2(-\pi, \pi)$ において $e_n(x) = e^{inx}$ とすると $E = \{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は正規直交系でした．

直交射影 —有限次元の場合—

次に直交射影は，有限次元の部分空間 $F \subset V$ に対しては $\mathbb{C}^d$ のときと同様に F の正規直交基底 $\{f_n\}_{n=1}^N$ をとって

$$P_F v = \sum_{n=1}^{N} \langle v, f_n \rangle f_n$$

と定義することができます（基底の取り方によらないことは自習）.

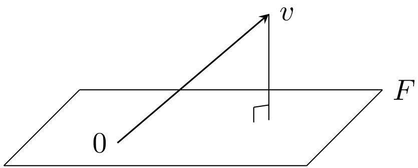
この用語を使えば，Fourier 部分和とは $f \in L^2(-\pi, \pi)$ の $\{e_n\}_{n=-N}^N$ で張られる部分空間への直交射影だったということになります．すると Bessel の不等式

$$\left\| \sum_{n=-N}^{N} \langle f, e_n \rangle e_n \right\|_2 \leq \|f\|_2$$

は直交射影が元のベクトルより小さくなるということで，自然に見えてきます（だからと言って絵を描いて証明ができるわけではありませんが）.

無限次元空間での射影

内積空間 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ が無限次元の場合，全ての部分空間への直交射影が考えられるわけではありません．これを見るために，まず v の有限次元部分空間 F への直交射影は，F の中で v に最も近い点だったことを思い出しましょう．知らなくてもとりあえず絵で納得すれば結構です．



ここで $C_c(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ という部分空間を考えましょう．第 6 回に証明した通り $C_c(\mathbb{R})$ は $L^2(\mathbb{R})$ で稠密ですから，例えば $1_{[0,1]} \in L^2(\mathbb{R})$ に対して，いくらでも近い点が $C_c(\mathbb{R})$ に見つかります．つまり $1_{[0,1]}$ と $C_c(\mathbb{R})$ の距離は 0 です．ところが $1_{[0,1]} \notin C_c(\mathbb{R})$ ですから，$1_{[0,1]}$ から最も近い $C_c(\mathbb{R})$ の点は存在しません．このことから想像されるように $L^2(\mathbb{R})$ から部分空間 $C_c(\mathbb{R})$ への直交射影は存在しません．

閉凸集合への射影

実は内積空間が完備で部分空間が閉集合ならば直交射影は存在するのですが，変分問題で有用なわずかな拡張を証明しておきます．

定義

線型空間 V の部分集合 A が凸集合であるとは，A の中の任意の二点をつなぐ線分が A に含まれること，つまり

$$\forall u, v \in A, \forall t \in [0,1], \quad (1-t)u + tv \in A$$

となることをいう．

定理

Hilbert 空間 $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の任意の閉凸集合 A と $v \in H$ に対して，

$$\mathrm{dist}(v, A) = \inf\{\|v - a\| : a \in A\}$$

を達成する点 $a_v^* \in A$ がただ一つ存在する．

閉凸集合への直交射影の存在証明

まず一般に $x, y \in H$ に対して，次の平行四辺形則が成り立ちます：

$$\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2.$$

（証明はノルムを内積で書いて展開するだけなので自習．）

では $a_v^* \in A$ の存在を証明しましょう． $\|v - a_n\| \to \mathrm{dist}(v, A)$ $(n \to \infty)$ となる $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ をとります． このとき二つの自然数 m, n に対して，$x = a_m - v$, $y = a_n - v$ として平行四辺形則を使えば

$$\|a_m - a_n\| = 2\|v - a_m\|^2 + 2\|v - a_n\|^2 - \|2v - (a_m + a_n)\|^2$$

ですが， A の凸性から $\frac{a_m + a_n}{2} \in A$ なので $\|v - \frac{a_m+a_n}{2}\| \geq \mathrm{dist}(v, A)$ です．このことから $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であることがわかります．

ここで H は完備と仮定していたので極限 $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a_v^* \in H$ が存在し， さらに A は閉集合だったので $a_v^* \in A$ です．

閉凸集合への直交射影の一意性証明

次に一意性を証明しましょう．$\tilde{a}_v^* \in A$ を a_v^* とは異なる v に最も近い点とします．このとき平行四辺形則から

$$\begin{aligned}\|a_v^* - \tilde{a}_v^*\|^2 &= 2\|v - a_v^*\|^2 + 2\|v - \tilde{a}_v^*\|^2 - 4\left\|v - \tfrac{1}{2}(\tilde{a}_v^* + a_v^*)\right\|^2 \\ &= 4\mathsf{dist}(v, A)^2 - 4\left\|v - \tfrac{1}{2}(\tilde{a}_v^* + a_v^*)\right\|^2\end{aligned}$$

となります．ところが前のページと全く同様に，A が凸集合という仮定から $\frac{1}{2}(\tilde{a}_v^* + a_v^*) \in A$ なので，$\|v - \frac{1}{2}(\tilde{a}_v^* + a_v^*)\| \geq \mathsf{dist}(v, A)$ となって $\|a_v^* - \tilde{a}_v^*\| \leq 0$ という矛盾が導かれます． $\square$

この定理の存在部分は，H が有限次元のときは有界閉集合のコンパクト性から導くこともできます．しかし第 8 回に述べたように，無限次元では有界閉集合はコンパクトとは限りません．コンパクト性がないときに最小値の存在を示すのは一般には難しい問題で，そこにこの定理の意義があるわけです．

変分問題への応用と一様凸性

この定理の応用例は第 5 回に紹介した変分問題

$$\inf\left\{ \|f\|_{L^2} \;\middle|\; f \in L^2[-1,1], -\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 1 \right\}$$

です．実際 $L^2[-1,1]$ は Hilbert 空間で，上の集合は閉凸集合であることが確かめられるので，定理から解の存在と一意性が直ちに分かります．

ところで定理の証明では平行四辺形則が重要な役割を果たしていますが，使っているのは粗っぽく言うと「二つの点 x, y の中点のノルムは，$\frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|)$ より真に小さい」ということです．このような性質を持つ空間を一様凸空間といい，上の証明はその設定で実行可能です．一様凸でない空間の例は $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ であり，実はこれが上の変分問題がこの完備な空間で解を持たなかったことの謎解きです．一様凸空間の例は Hilbert 空間以外では $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ $(1 < p < \infty)$ があります．

閉部分空間への直交射影

線型空間の部分空間は凸集合なので，Hilbert 空間 H の閉部分空間 M に対しては，いま示した定理から $v \in H$ から最も近い点 m_v^* が存在します．この $v \mapsto m_v^*$ は線型写像になることが分かるので $m_v^* = P_M v$ のように書いた方が自然で，さらに定義から明らかに $P_M^2 v = P_M v$ なので，これはいわゆる射影作用素になっています．

これは $(v - P_M v) \perp M$ となる唯一の点でもあります．実際，$P_M v$ が M の中で v に最も近い点であることは，任意の $m \in M$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} &\|v - (P_M v + tm)\|^2 - \|v - P_M v\|^2 \\ &= 2t\,\mathrm{Re}\langle v - P_M v, m\rangle + t^2\|m\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

となることと同値です．任意の $t \in \mathbb{R}$ と $m \in M$ に対してこれが成り立つのは $\langle v - P_M v, m\rangle = 0$ のときであり，かつそのときに限られます．

この理由で P_M を部分空間 M への直交射影といいます．

直交補空間

前のページの議論によって任意の $v \in H$ は $v = P_M v + (\mathrm{id} - P_M)v$（id は恒等写像）と，$M$ とそれに直交するベクトルへの和に一意的な分解されます．この直交射影による分解は，補空間の概念と自然に関係しています．一般に部分空間 M に対して，その全ての元と直交するベクトルの全体を

$$M^{\perp} = \{v \in H \colon \forall u \in M, \langle u, v \rangle = 0\}$$

と定めると，これがまた部分空間になることは簡単に確かめられます．M が閉部分空間のときの $v = P_M v + (\mathrm{id} - P_M)v$ は v を M と $M^{\perp}$ の元の和に分解したわけです．この分解が一意的であったということは，Hilbert 空間 H が

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

と直和分解できることを示しています．これを直交直和分解といい，$M^{\perp}$ を M の直交補空間といいます．

さらに（実は M が閉でなくても）$M^{\perp}$ は閉部分空間であることが分かり，$M^{\perp}$ への直交射影が $\mathrm{id} - P_M$ であることも簡単に確かめられます．

双対性と反例

さて，M が閉部分空間とすると $H = M \oplus M^{\perp}$ という分解がありますが，$M^{\perp}$ も閉部分空間なので $H = M^{\perp} \oplus M^{\perp\perp}$ という分解も可能です．しかし $v \in H$ を $M^{\perp}$ とそれに直交するベクトルに分解する方法は一意なのでしたから $M^{\perp\perp} = M$ です．これはある種の双対性です．

直交直和分解や $M^{\perp\perp} = M$ は有限次元の感覚では当たり前に見えるかも知れませんので，簡単な反例を挙げておきます．$\ell^2(\mathbb{N})$ の部分空間 $c_c(\mathbb{N})$ を考えましょう．$a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $c_c(\mathbb{N})$ と直交するなら，とくに第 m 項が 1 でそれ以外は 0 という数列 $\delta^{(m)} = (\delta_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ とも直交します．ところがそれは

$$a_m = \langle a, \delta^{(m)} \rangle = 0$$

を意味するので，a の全ての成分は 0 になるしかありません．つまり $c_c(\mathbb{N})^{\perp} = \{0\}$ です．しかし当然 $\ell^2(\mathbb{N}) \neq c_c(\mathbb{N}) \oplus \{0\}$ ですから，直交直和分解は成立していません．また $c_c(\mathbb{N})^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = \ell^2(\mathbb{N}) \neq c_c(\mathbb{N})$ です．

ノルム空間はいつ内積空間か？

いろいろと内積空間の良い面を見てきたので，いつノルム空間が内積空間になるかに興味があるかも知れません．これについては，次の簡単な同値条件があります：

命題

ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ に対して $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ となる内積が存在することは，次の平行四辺形則が成り立つことと同値である：

$$\forall x, y \in V, \quad 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2.$$

証明ですが，「内積空間 $\Rightarrow$ 平行四辺形則」はすでに見ました．逆は安直に

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$$

と定義して，これが内積の公理を満たすことを確認するだけなのですが，スカラー倍の議論が結構トリッキーです．自分でしばらく楽しんでから証明を探してみてください．