

三角関数による展開

Fourier は熱方程式という微分方程式を解くために、関数 $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と展開することを考えました。

この展開を使って微分方程式をどのように解くかは「偏微分方程式」の講義で扱われると思うので、この講義では上の展開の正当性などを中心に学びます。ただし現代的には f は複素数値とするのが普通で、Euler の公式 $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ を念頭に置いて、この指数関数での展開と考えることにします。また $n \in \mathbb{Z}$ とします。

上のような展開の正当性や、そこから発展した調和解析という分野は、微分方程式にとどまらず、数論や確率論にも広く関係しています。

Taylor 展開との比較

関数の展開と言えば Taylor 展開を知っているので、比較する形で書いてみると...

Taylor 展開 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ が 0 のある近傍で正則ならば

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

が 0 の近傍で絶対収束かつ広義一様収束の意味で成り立つ.

Fourier 展開 $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ が ? ならば

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

が ? 収束の意味で成り立つ.

問題点の整理

主張の中にいろいろ分からないことがあるので、問題点を整理します：

- 1 展開の係数 $\hat{f}(n)$ はどう決まるのか？
- 2 展開が成立するための f の条件 ? は？
- 3 成立するとして “? 収束” の意味は？

このうち 2 と 3 の答えは一つではなく、また互いに関連しています。
とくにこの講義の中で新しい収束概念も学びます。

今回はとりあえず以下の仮定をおいて 1 について考えてみます：

仮定 1 $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ は可積分である，

仮定 2 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$ は絶対収束する。

ここで $|e^{inx}| = 1$ に注意すると、仮定 2 の下では Weierstrass の判定法が
使えて、Fourier 級数 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$ は一様収束します。

Fourier 係数の決まり方： $\hat{f}(0)$

このとき、もし Fourier 級数が元の関数に収束するならば

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

であり、さらに一様収束なので項別積分ができて¹

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx$$

となります。ここで $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = 2\pi \delta_{0,n}$ (Kronecker のデルタ) を使うと、

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

でなければならないことが分かります。

¹項別積分は Lebesgues の収束定理でもできるので確認しましょう。

Fourier 係数の決まり方： $\hat{f}(m)$

一般の $m \in \mathbb{Z}$ に対しても，展開の両辺に e^{-imx} をかけてから積分すれば

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}dx &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx \\ &= 2\pi \hat{f}(m)\end{aligned}$$

となるので，Fourier 展開の係数は[仮定 1](#)，[仮定 2](#)の下では

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}dx$$

でなければならないことが分かりました.

この計算で鍵になった事実は $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx = \delta_{n,m}$ と書くことができます. これは後で再び現れ，そのときに意味がよく分かります.

仮定の妥当性

ここまでは二つの都合の良い仮定をおいて進めてきましたが、これらが満たされることはあるのでしょうか？ 仮定 1 の方は、 $\hat{f}(0)$ が定義できるために最低限必要な条件なので、自然です。簡単で分かりやすい十分条件としては、例えば $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ が連続ならば OK です。

一方で仮定 2 の方は原理的には $\hat{f}(m)$ を全て計算してみないと分からないので、難しそうです。これを f の性質に帰着する簡単な十分条件を述べるために、関数空間

$$C_{\text{per}}^m[-\pi, \pi] := \left\{ f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ は } C^m \text{ 級で} \right. \\ \left. \text{全ての } k \leq m \text{ に対し } f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi) \right\}$$

を導入します。（per は “periodic” の最初の 3 文字。）

f の滑らかさから $\widehat{f}$ の減衰を出す

次の命題は f が滑らかならば $\widehat{f}$ は速く減衰することを意味しています。

命題

$f \in C_{\text{per}}^m[-\pi, \pi]$ ならば $n \neq 0$ に対して $\widehat{f}(n) = \frac{1}{(in)^m} \widehat{f^{(m)}}(n)$.

証明：部分積分を使うと

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[-\frac{1}{in} f(x) e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx \right\} \\ &= \frac{1}{in} \widehat{f'}(n).\end{aligned}$$

これが $m = 1$ の場合で、あとは帰納法です。



仮定が満たされるための十分条件

$f \in C_{\text{per}}^m[-\pi, \pi]$ ならば $(\widehat{f^{(m)}}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ が有界であることが分かるので、
 $m \geq 2$ ならば前のページの命題から $\widehat{f}(n) = O(n^{-2})$ となって

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \leq C \left(1 + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right) < \infty$$

となって**仮定 2**が成立します。

以上の考察により、 $f \in C_{\text{per}}^2[-\pi, \pi]$ ならば**仮定 1**、**仮定 2**が両方成立することが分かります。従って $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx}$ は絶対収束かつ一様収束します。

この収束先が $f(x)$ であれば Fourier 展開ができたということになるのですが、これは意外に難しい問題です。係数 $\widehat{f}(n)$ は「あるとしたらこれしかない」決め方になっているので、収束先は当然 f ではないかと思うかもしれませんが、微積分でも同じような問題があったので復習します。

解析的でない C^∞ 関数

2 ページで Fourier 展開と Taylor 展開の比較をしました。Taylor 展開の係数 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ も「あるとしたらこれしかない」決め方でしたが、

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{1}{x^2}\right\}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

と定めると何回でも微分可能で、全ての $n \geq 0$ で $f^{(n)}(0) = 0$ となります。従って Taylor 級数 $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n \geq 0} 0$ は絶対収束かつ一様収束しますが、収束先は f とは異なります。

これと同様に、Fourier 級数でも収束先が f かという問題は非自明です。

もう少し丁寧に見ると、4~5 ページでの議論は $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ が一様収束するときその極限を g とすると、全ての $n \in \mathbb{Z}$ で $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ ということを示しています。このとき $f = g$ であるかどうかは別の問題ということです。

Fourier 級数の収束に関する否定的結果

Fourier 級数と元の関数の一致の問題は、次回に詳しく扱います。今回の最後は Fourier 級数の収束に関する否定的結果を紹介します。まず C_{per}^2 から C_{per} にすると、すでに反例が存在します：

定理 (du Bois-Reymond)

$f \in C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ であって、その Fourier 級数 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$ が $x = 0$ で非有界なものが存在する。

次に $\hat{f}$ が定義できるギリギリの条件は可積分性ですが、それだけの条件ではもっとひどいことが起こります：

定理 (Kolmogorov)

$[-\pi, \pi]$ において可積分な f であって、その Fourier 級数 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$ が全ての点で収束しないものが存在する。

このうち一つ目は来年の「関数解析」で現代的な証明を学びます。二つ目は専門書で学ぶレベルの内容です。