関数解析講義ノート

福島　竜輝

March 28, 2025

これは筑波大学数学類の「関数解析」という講義のために準備したノートです．一般的な注意ですが，このノートに書いてある証明や議論は完全に厳密であることを意図して書いていないことがあります．これは一回 75 分の講義で説明できる量に限界があることと，厳密な証明を書くとかえって理論の流れがわかりにくくなることがあること，そして厳密な証明はたいてい参考書に書いてあることが理由です．したがってこのノートを読むときにはある程度の緊張感を持って読むことが必要です．

ときどき確認問題，演習問題や，それと同じ意味の㊫，㊨が出てきます．前者は既に知っていることを使うか，定義を確認するくらいの問題，後者は少し考える必要のある問題です．

この講義の参考文献として，以下のものを挙げます：

- 増田久弥「関数解析」，裳華房
- 黒田成俊「関数解析」，共立出版
- 洲之内治男「関数解析入門」，サイエンス社
- Peter Lax, “Functional Analysis”, Wiley
- Gerald Teschl,“Topics in Linear and Nonlinear Functional Analysis”[*1]
- 吉田伸生「関数解析の基礎」，裳華房

これらを [増田，定理？？？] や [黒田，例？？？] のように参照することがあります．[増田] か [黒田] のどちらかは，講義で省略した証明の詳細などを確認するために持っておいたほうが良いと思います．他の文献は必要に応じて図書館などで見るくらいで十分でしょう．個別の話題や発展的事項については，より適切な参考文献を本文中に挙げることもあります．

[*1] これは出版予定の書籍の原稿ですが，著者の website から入手可能で，おそらく出版後もその方針は変わらないと思います．
https://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-fa/

Contents

第 1 章　線型汎関数と Riesz の表現定理　1

1.1　線型汎関数　1
1.2　Riesz の表現定理　2
1.3　Radon–Nikodym の定理　3
1.4　補遺：Banach 空間の代数的な双対空間について　4

第 2 章　Riesz の表現定理の偏微分方程式への応用　7

2.1　Sobolev 空間の準備　7
2.2　Poisson 方程式の弱解：take 1　8
2.3　いくつかの注意　10
2.4　補遺：より一般の二階楕円型方程式　10

第 3 章　微分・積分方程式と有界作用素　13

3.1　微分方程式から積分方程式へ　13
3.2　積分方程式を線型代数的に捉える　14
3.3　無限次元線型代数の難しさ　15
3.4　積分作用素を L^2 で考えた場合　16

第 4 章　不動点定理と Neumann 級数　19

4.1　Banach の不動点定理　19
4.2　Volterra 型の特殊事情　20
4.3　Neumann 級数の方法　21
4.4　二つの方法の利点について　23
4.5　Riesz の表現定理再考　23

第 5 章　有限階作用素とコンパクト作用素　25

5.1　線型方程式の解の構造：有限次元と無限次元の違い　25
5.2　“有限階” 作用素　26
5.3　有限階作用素に対する Fredholm の択一　26
5.4　積分作用素のコンパクト性　28

5.5 Riesz–Schauder の理論：Hilbert 空間の場合 29
5.6 補遺：$L^2([0,1]^2)$ の完全正規直交系 29

第 6 章 Hilbert–Schmidt の展開定理 33
6.1 対角化の無限次元版に向けて 33
6.2 Hilbert–Schmidt の展開定理 34
6.3 固有値が存在すること 34
6.4 Hilbert–Schmidt の展開定理の証明 36
6.5 補遺：一般の作用素の場合へ向けた注意 37

第 7 章 Banach 空間の共役空間の例 39
7.1 L^p の共役空間 39
7.2 $C_{\mathrm{c}}(S)$ の共役空間 42

第 8 章 Hahn-Banach の定理 45
8.1 何が問題なのか 45
8.2 Hahn–Banach の定理 46
8.3 共役空間の一般論 48
8.4 L^∞ の共役空間 48
8.5 第二共役空間 50
8.6 補遺：無限次元ノルム空間の閉球は非コンパクト 50

第 9 章 弱収束・汎弱収束 51
9.1 弱収束，汎弱収束 51
9.2 弱収束，汎弱収束の一般的性質 53
9.3 汎弱収束による点列前コンパクト性 54
9.4 補遺：Hilbert 空間の有界集合は点列前コンパクト 55

第 10 章 弱収束・汎弱収束の応用 57
10.1 汎弱収束極限としての δ 関数 57
10.2 Poisson 方程式の弱解の存在: take 2 58
10.3 コンパクト自己共役作用素の固有値 59
10.4 補遺：$H_0^1(D) \subset L^2(D)$ について 61

第 11 章 Baire のカテゴリー定理と一様有界性原理 63
11.1 Baire のカテゴリー定理 63
11.2 一様有界性原理と Banach–Steinhaus の定理の証明 64
11.3 du Bois-Raymond の定理 65
11.4 補遺：代数基底の係数がほとんど非有界であることの別証明 68

第 12 章　開写像定理と値域定理 69
12.1 開写像定理と値域定理の主張 69
12.2 可積分関数の Fourier 係数 70
12.3 開写像定理の証明 71

第 13 章　Banach 空間上のコンパクト作用素 73
13.1 コンパクト作用素が有限階作用素で近似できる条件 73
13.2 いくつかのコメント 76

第 14 章　閉作用素と閉グラフ定理 77
14.1 閉作用素 78
14.2 閉グラフ定理 79
14.3 閉グラフ定理の応用 79
14.4 補遺：前閉（可閉）作用素 81

第 15 章　リゾルベントとスペクトル 83
15.1 リゾルベントとスペクトル 83
15.2 Fourier 変換を使って $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ のスペクトルを調べる 84
15.3 スペクトル表現定理と展望 86

第 1 章

線型汎関数と Riesz の表現定理

この講義で学ぶ関数解析は標語的に「無限次元の線型代数」と呼ばれることが多い分野です．それが適当かどうかは徐々にわかると思います．無限次元の線型空間については，昨年度の「関数解析入門」ですでに基礎的なことを学びました．例えば閉単位球がコンパクトにならなかったり，部分空間への射影が必ず存在するとは言えなかったり，いろいろと気持ちの悪いことも見てきました．

この講義ではさらに進んで，無限次元の線型空間の上の線型写像について学びます．線型写像の理論を無限次元に拡張するのは，実際のところかなり注意を要する問題で，とくにノルム（か少なくとも位相）の概念なしでは難しいことを，この章と第 3 章に分けて説明します．

この章は値の空間が最も簡単な一次元空間で，さらに定義域が Hilbert 空間の場合には，連続な線型写像には良い表現があることを知るのが目標です．

1.1 線型汎関数

線型空間からその係数体への線型写像のことを線型汎関数といいます．関数解析では係数体は通常 $\mathbb{C}$（または $\mathbb{R}$）ですから，線型空間 X の上の線型汎関数とは

$$\begin{aligned}&\phi\colon X \to \mathbb{C} \text{ で，任意の } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, x, y \in X \text{ に対し}\\ &\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha\phi(x) + \beta\phi(y) \text{ となるもの}\end{aligned}$$

です．このような関数の全体を X の双対空間といい，X^* と書くのでした．とくに $X = \mathbb{C}^n$ の場合には，任意の線型汎関数 ϕ は標準基底 $\mathbf{e}_k$ の像を $\phi(\mathbf{e}_k) = \overline{y_k}$ とおくことで，

$$\phi(x) = \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}$$

として表現できて，この対応により $(\mathbb{C}^n)^* = \mathbb{C}^n$ と見なせます．

線型汎関数の一つの役割は，線型空間の要素（つまりベクトル）の部分的な情報を取り出す「測定器」です．例えば

- $v \in \mathbb{C}^n$ に対し $\phi_k(v) = \langle v, \mathbf{e}_k\rangle$ は v の k 成分という情報，
- $v \in C[0,1]$ に対し $\phi_x(v) = v(x)$ は v の点 x での値という情報

を取り出す線型汎関数です．上の二つの線型汎関数を使うことで，空間 $X = \mathbb{C}^n, C[0,1]$ ではベクトル v に対して全ての線型汎関数の値 $\{\phi(v)\}_{\phi\in X^*}$ を知れば v が復元できます．より一般の線型空間でも基底 E の存在を仮定すれば，$\mathbf{e} \in E$ に対して

$$\phi_{\mathbf{e}}(v) = v \text{ を基底で展開した時の } \mathbf{e} \text{ の係数}$$

という線型汎関数が考えられるので，全ての線型汎関数で「測った」値を知れば，ベクトルは復元できます．

しかし残念ながらこの考え方は現実にはあまり役に立ちません．その理由は「線型汎関数の全体」が集合として大きすぎるからです．例えば上の基底を使った考え方では，「線型汎関数の全体」の集合の中に $\{\phi_{\mathbf{e}}\}_{\mathbf{e}\in E}$ が含まれていることが重要でしたが，この線型汎関数は実は非常にたちの悪いものです．実際 X が無限次元の Banach 空間とすると，この中には連続なものは有限個しかないことがわかります（証明はこの節の終わりに書いておきます）．線型汎関数 ϕ の不連続性は，二つのベクトル $v_1, v_2 \in X$ が近くても，その ϕ による測定の結果 $\phi(v_1)$ と $\phi(v_2)$ は近くないことを意味し，そんな測定器があまり役に立たないことは想像に難くないと思います．このようにたちの悪いものを含んでいることは，「線型汎関数の全体」が大きすぎることを表す一例です．このため関数解析では，線型汎関数を考えるときには原則として連続なものに限ります．

定義 1.1.1. *ノルム空間 X 上の連続線型汎関数の全体 X' を X の共役空間という．*

こうして線型空間としての双対 X^* と異なる X' を相手にすることにするわけですが[*1]，「測定器」の数を減らしてしまったので，

$$X' \text{ に属する汎関数で測った値からベクトルが復元できるか？}$$

という問題が生じます．基底から定めた $\{\phi_{\mathbf{e}}\}_{\mathbf{e}\in E}$ のほとんどが使えなくなることを思い出すと，深刻な問題であることがわかると思います．この問題の解決は結構大変で，一般には第 8 章で「復元」より少し弱く「区別（同定）」できるという形で解決します．数学的に述べると

$$\text{任意の } \phi \in X' \text{ に対して } \phi(x) = \phi(y) \text{ ならば } x = y$$

ですが，線型性から「任意の $\phi \in X'$ に対して $\phi(x) = 0$ ならば $x = 0$」と言っても同じことです．また同定問題が解決したとしても，「任意の $\phi \in X'$ に対して」という条件があるので，応用上は X' が何であるかわからなければ困ることもあります．この解決には X' が X^* より小さいことが有利に働きます．

1.2　Riesz の表現定理

この章では Hilbert 空間 H に限って，上で述べたような問題について考察します．まず同定問題はこの場合には簡単で，任意の $h \in H$ との内積 $x \mapsto \langle x, h\rangle$ が連続線型汎関数なので，任意の $\phi \in H'$ に対して $\phi(x) = 0$ ならとくに $\|x\|_H^2 = \langle x, x\rangle = 0$ です．次に H' の特徴づけも，以下のように単純になります：

[*1] 本によって共役空間を「ノルム空間としての双対」と呼んだり，記号として X^* をそのまま使う場合もあるので注意してください．

定理 1.2.1 (Riesz の表現定理)**.** $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を Hilbert 空間とし，ϕ をその上の連続線型汎関数とすると，ただ一つ $h_\phi \in H$ が存在して $\phi(x) = \langle x, h_\phi\rangle$ と表現できる．

これにより H 上の連続線型汎関数の全体は，集合としては H と同じであるということができます．これは有限次元のときに $(\mathbb{C}^n)^* = \mathbb{C}^n$ と見なせたのとよく似ています．Riesz の表現定理の証明は難しくありません．一度は何も見ないで挑戦してみるのも良いと思います．

Riesz の表現定理の証明. まず直和分解 $H = \mathrm{Ker}(\phi) \oplus \mathrm{Ker}(\phi)^\perp$ に従って $x \in H$ を $x = x_1 + x_2$ と分解すれば，$\phi(x) = \phi(x_2)$ です．ここで ϕ は値域が $\mathbb{C}$ の線型写像なので，準同型定理により $H/\mathrm{Ker}(\phi) \simeq \mathrm{Ran}(\phi)$ は一次元です[*2]．したがって $\mathrm{Ker}(\phi)^\perp$ も一次元であり，上の x_2 はそこへの直交射影なので，ある $h \in \mathrm{Ker}(\phi)^\perp$ によって $x_2 = \langle x, h\rangle h$ と表せます．すると

$$\phi(x_2) = \langle x, h\rangle\phi(h) = \left\langle x, \overline{\phi(h)}h\right\rangle$$

なので，$h_\phi = \overline{\phi(h)}h$ として求める表現が成り立っています．

一意性は，二つの h_1, h_2 で表現できるとすると，すべての $x \in H$ との内積が一致することになって，このとき定理 1.2.1 の前に見た通り $h_1 = h_2$ となります． □

確認問題 1.2.2. 上の証明において，ϕ の連続性をどこに使ったか指摘せよ．

1.3 Radon–Nikodym の定理

Riesz の定理の応用として，次の定理を示しましょう．これはあとで L^p 空間の共役空間の特徴付に使ったり，確率論では条件付き平均（作用素）の定義に使われるなど，重要な定理です．

定理 1.3.1 (Radon–Nikodym の定理)**.** 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の二つの有限測度 μ, ν に対して，「$\mu(A) = 0$ ならば $\nu(A) = 0$」であるとする（ν は μ に対して絶対連続という）．このときある $h \in L^1(\mu)$ によって以下のように表せる[*3]：

$$\text{任意の } A \in \mathcal{F} \text{ に対して, } \nu(A) = \int_A h\,\mathrm{d}\mu.$$

Radon–Nikodym の定理の証明. $f \in L^2(\mu+\nu)$ に対して $\int f\,\mathrm{d}\mu$ を考えると，Schwarz の不等式から

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\mu - \int g\,\mathrm{d}\mu\right| \le \|f-g\|_{L^2(\mu+\nu)}(\mu+\nu)(\Omega)^{1/2}$$

ですから，$f \mapsto \int f\,\mathrm{d}\mu$ は Hilbert 空間 $L^2(\mu+\nu)$ 上の連続線型汎関数です．従って Riesz の表現定理により，ある $g \in L^2(\mu+\nu)$ が存在して

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \int fg\,\mathrm{d}(\mu+\nu) \Longrightarrow \int f(1-g)\,\mathrm{d}\mu = \int fg\,\mathrm{d}\nu \tag{1.3.1}$$

となります．この g は以下の自然な性質を持ちます．

[*2] $\mathrm{Ran}(\phi)$ は ϕ の値域で $\mathrm{Im}(\phi)$ と書くこともあります．

[*3] h のことを Radon–Nikodym 微分といい，$h = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ と書きます．

確認問題 1.3.2. f を適当な集合の定義関数にとることで，μ に関してほとんど至るところで $0 < g \leq 1$ であることを示せ.

この事実と単調収束定理を使って，(1.3.1) は全ての非負可測関数 f に対して成り立つことがわかります．そこで任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，$f = 1_A/g$ として (1.3.1) を使うことができて，

$$\int_A \tfrac{1-g}{g}\,\mathrm{d}\mu = \nu(A)$$

となるので，$h = \frac{1-g}{g}$ として Radon–Nikodym の定理が成立します. □

Radon–Nikodym の定理はいくつかの方向に拡張できます．まず次の拡張は簡単です：

確認問題 1.3.3. Radon–Nikodym の定理は μ, ν が σ-有限の仮定でも成り立つことを示せ.

もう一つの拡張は複素測度（符号付き測度）への拡張です．複素測度は実部と虚部，さらにそれぞれを正の部分と負の部分に分解できます (Hahn–Jordan の分解定理)[*4]．こうして分解したそれぞれの部分に Radon–Nikodym の定理を適用することで，σ-有限な μ に絶対連続な複素測度 ν に対しても $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ の存在が言えます[*5]．この拡張をあとで $L^p(\mu)$ の共役空間の特徴づけに使います.

1.4　補遺：Banach 空間の代数的な双対空間について

ここでは無限次元 Banach 空間 X の代数的な双対空間 X^* が「大きすぎる」ということを示唆する二つの事実を紹介します.

1 つ目は，既に述べた「代数基底による展開係数」という線型汎関数が，有限個を除いて連続ではないという事実です．無限次元 Banach 空間 X の基底 E の無限部分集合 $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとり，必要なら定数倍して $\|\mathbf{e}_n\| = 1$ としておきます．このとき

$$v_N = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\mathbf{e}_n \xrightarrow{n\to\infty} v = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mathbf{e}_n$$

は簡単にわかります．この極限の v を基底 E で展開すると，ある有限集合 $E_0 \subset E$ によって $v = \sum_{\mathbf{e}\in E_0} \phi_{\mathbf{e}}(v)\mathbf{e}$ と書けるはずです．ここで E_0 は有限集合なので $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の中の高々有限個しか含みません．そこで $\mathbf{e}_k \notin E_0$ をとると，v_N はもともと基底の有限和で表せているので，すべての $N \geq k$ に対して $\phi_{\mathbf{e}_k}(v_N) = 2^{-k}$ です．したがって $\lim_{N\to\infty} \phi_{\mathbf{e}_k}(v_N) = 2^{-k}$ ですが，一方で $\phi_{\mathbf{e}_k}(v) = 0$ なので $\phi_{\mathbf{e}_k}$ は連続ではありません．最初の無限部分集合の取り方は任意だったので，連続であるような $\phi_{\mathbf{e}}$ は有限個しかないことが示せました.

2 つ目は，「代数基底による展開係数」が X^* の基底にならないという事実です．これは有限次元の場合には，上の線型汎関数が双対基底と呼ばれ，双対空間の基底になっていたことと対照的です．例として

[*4] 複素測度について知らなければ Lebesgue 積分の教科書を参照してください.
[*5] 複素測度は $\mathbb{C}$-値で，とくに ∞ を値に取らないので有限測度です.

$x \in X$ を基底の線型結合で表現した

$$x = \sum_{\mathbf{e}\in E} \phi_{\mathbf{e}}(x)\mathbf{e}$$

において，係数の和をとるという写像 $x \mapsto \sum_{\mathbf{e}\in E} \phi_{\mathbf{e}}(x)$ を考えてみましょう．これは明らかに線型汎関数ですが，これを $\phi_{\mathbf{e}}$ を使って表そうとすれば $\sum_{\mathbf{e}\in E} \phi_{\mathbf{e}}$ となることから想像されるように，有限和で表すことはできないことがわかります．従って $\{\phi_{\mathbf{e}}\}_{\mathbf{e}\in E}$ は X^* の基底ではありません．

このように代数的な双対空間 X^* は，最も基本的に見える線型汎関数が連続でなく，さらにそれを使って表せないものをたくさん含んでいる，という意味で大きすぎる空間です．

確認問題 1.4.1. 無限次元線型空間 X の基底を E とすると，代数的な双対空間 X^* は $\mathbb{C}^E$ と表現できることを示せ．（これは関数解析ではなく代数の問題．）

第 2 章

Riesz の表現定理の偏微分方程式への応用

この章では Riesz の表現定理の偏微分方程式への応用を扱います．これは Hilbert が調和関数の存在を示す Dirichlet 原理を正当化した議論の，現代的な定式化と言えます．偏微分方程式の理論では実数値関数に限って考えることも多いので，関数空間は実数値とし，従ってノルム空間の係数体も $\mathbb{R}$ とします．このとき内積は対称になることに注意しておきます．

念のため Riesz の表現定理を思い出しましょう：

定理 2.0.1 (Riesz の表現定理)**.** $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を Hilbert 空間とし，ϕ をその上の連続線型汎関数とすると，ただ一つ $h_\phi \in H$ が存在して $\phi(x) = \langle x, h_\phi\rangle$ と表現できる．

2.1 Sobolev 空間の準備

Riesz の表現定理を使って偏微分方程式の解の存在を示すために，まず弱解の概念を導入します．弱解とは一言で言えば，微分方程式が各点で満たされることの代わりに，あるクラスの線型汎関数（＝測定器）を通して見たときにだけ方程式が成り立つように要請したものです．

$D \subset \mathbb{R}^d$ を有界な領域（連結な開集合）とし，与えられた関数 $f \in L^2(D)$ に対して，未知関数を u とする境界値問題

$$\Delta u = f, \quad u|_{\partial D} = 0$$

を考えます．前の章で述べたように内積によって $L^2(D)$ の関数は同定できますから，u が D の至るところで二階微分可能で $\Delta u \in L^2(D)$ と仮定すると，方程式を満たすことは次のように言い換えられます：

$$\Delta u = f \iff \text{すべての } \phi \in L^2(D) \text{ に対し } \langle \Delta u, \phi\rangle_{L^2} = \langle f, \phi\rangle_{L^2}.$$

ここで[*1]，

$$C_c^\infty(D) = \left\{ f\colon D \to \mathbb{R} \mid f \text{ は何回でも微分可能で，台が } D \text{ のコンパクト部分集合} \right\}$$

が $L^2(D)$ で稠密なので, 右側の条件は「すべての $\phi \in C_c^\infty(D)$ に対し」としても同じで, さらに $u \in C^2(D)$

[*1] 関数 f の台とは，$\{x\colon f(x) \neq 0\}$ の閉包です．

なら次のように「対称化」した条件とも同値です：

$$\text{すべての } \phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(D) \text{ に対し } -\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle_{L^2} = \langle f, \phi \rangle_{L^2}.$$

確認問題 2.1.1. 最後の同値性を $\phi \nabla u$ に Gauss の発散定理を使って確かめよ[*2].

さて，最後の条件

$$\text{すべての } \phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(D) \text{ に対し } -\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle_{L^2} = \langle f, \phi \rangle_{L^2} \tag{W}$$

が意味を持つためには u の一階微分しか必要ないことに注意しましょう．さらに $\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle_{L^2}$ は内積の形をしているので，それについて完備な空間を考えるのが自然です．これらを念頭において解の概念を拡大します．このために安直ですが $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(D)$ を

$$\langle f, g \rangle_{H^1} = \int \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x, \quad \|f\|_{H^1} = \left(\int |\nabla f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

で完備化した空間 $H_0^1(D)$ を考えます[*3]．これは Sobolev 空間と呼ばれるものの一例で，これを舞台に上の問題 (W) を考えたいのですが，そのためには $H_0^1(D)$ で微分 ∇ が意味を持つ必要があります．

いま ∇ は $(C_{\mathrm{c}}^{\infty}(D), \|\cdot\|_{H_0^1})$ から $L^2(D)$ の写像としては問題なく定義されていますが[*4]，これは一様連続になっています．実際ノルムの定義により，$f, g \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(D)$ に対して

$$\begin{aligned} \|\nabla f - \nabla g\|_{L^2} &= \left(\int_D |\nabla f(x) - \nabla g(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \\ &= \|f - g\|_{H^1} \end{aligned}$$

なので Lipschitz 連続です．ここで距離空間の一般論として，$H_0^1(D)$ で稠密な $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(D)$ の上で一様連続な写像は全体に連続に拡張できるので，$\nabla \colon H_0^1(D) \to L^2(D)$ に連続写像として拡張されます．これにより $f, g \in H_0^1(D)$ に対しても $\langle f, g \rangle_{H_0^1} = \langle \nabla f, \nabla g \rangle_{L^2}$ と書くことが許されます㊟.

2.2 Poisson 方程式の弱解：take 1

以上の設定のもとで，Poisson 方程式の解概念の一般化として

$$u \in H_0^1(D) \text{ で，すべての } \phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(D) \text{ に対し } -\langle u, \phi \rangle_{H^1} = \langle f, \phi \rangle_{L^2} \text{ を満たすもの}$$

が考えられます．これを Poisson 方程式の (H^1-) 弱解と言います．

ここで二つ注意があります．一つ目は弱解の「弱さ」についてです．上の条件を満たす $u \in H_0^1(D)$ が見つかったとして，現時点ではそれが関数かどうかすらわかりません．完備化を抽象的に行ったので，u は「C_{c}^{∞} 内の $\|\cdot\|_{H_0^1}$-Cauchy 列の同値類」です．さらに ∇ も連続性を使って拡張したので，一

[*2] ∂D は十分滑らかとして構いません．そうでなければこれは演習問題です．

[*3] 非退化なノルムになっていることは後で証明します．また台コンパクトから出発するのは，境界値が 0 の解を想定しているからです．

[*4] ただし，ここの $L^2(D)$ は $\mathbb{R}^d$ 値関数の空間です．実数値のときと同じ記号を使うのは紛らわしいかも知れませんが，常に区別するのも結構面倒なので文脈で理解してください．

般の $u \in H_0^1(D)$ に対しては微分ではありません．従って弱解 u が元の方程式 $\Delta u = f$ を満たすかどうかは不明です．二つ目は弱解の概念は一つではないことです．Gauss の発散定理をもう一度使うと $-\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle_{L^2} = \langle u, \Delta \phi \rangle_{L^2}$ となって，右辺を解の定義に使うと u の一階微分も不要になります（超関数解と言います）．ここでは Hilbert 空間の結果を使うために内積の形の定式化を使います．

後回しにした $\|\cdot\|_{H^1}$ の非退化性を示すために，それを L^2 ノルムと比較する不等式を示します．これにより $u \in H_0^1(D)$ が関数と見なせることもわかります[*5]．

定理 2.2.1 (Poincaré の不等式)**.** $D \subset \mathbb{R}^d$ は有界な領域とする．このときある $C_D > 0$ が存在して，任意の $f \in C_c^\infty(D)$ に対して

$$\int |f(x)|^2 \mathrm{d}x \leq C_D \int |\nabla f(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

$\|f\|_{H^1} = 0$ とすると，この定理により $\|f\|_{L^2} = 0$ となるので $f = 0$ です．従って $\|\cdot\|_{H^1}$ はノルムを定め，それによる完備化が考えられます．さらに $\|\cdot\|_{H^1}$-Cauchy 列は $\|\cdot\|_{L^2}$-Cauchy 列でもあることがわかるので，$H_0^1(D)$ の元は $L^2(D)$ の関数と見なせることもわかります．その同一視の下では，Poincaré の不等式は $f \in H_0^1(D)$ にまで拡張されます．

確認問題 2.2.2. $C_c^\infty(D)$ を $C^\infty(D)$ に取り替えると，不等式は成立しないことを示せ．

Poincaré の不等式の証明．これは簡単です．$D \subset (-M, M)^d$ となるように $M > 0$ を大きく取っておき，D の外では 0 とすることで f を $(-M, M)^d$ 上の関数と見なします．任意の $x \in D$ に対して $-\mathbf{e}_1$ 方向に引いた半直線が ∂D と交わる点を $y = (y_1, x_2, \ldots, x_d)$ とすると，$f(y) = 0$ であることと，微積分の基本定理，Schwarz の不等式を順に使って

$$\begin{aligned} |f(x)|^2 &= \left| \int_{y_1}^{x_1} \tfrac{\partial}{\partial x_1} f(z, x_2, \ldots, x_d) \mathrm{d}z \right|^2 \\ &\leq 2M \int_{y_1}^{x_1} \left| \tfrac{\partial}{\partial x_1} f(z_1, x_2, \ldots, x_d) \right|^2 \mathrm{d}z \\ &\leq 2M \int_{-M}^{M} |\nabla f(z_1, x_2, \ldots, x_d)|^2 \mathrm{d}z \end{aligned}$$

を得ます．これを x について積分すると求める不等式が得られます． □

準備が大変でしたが，$f \in L^2(D)$ に対して Poisson 方程式の弱解，つまり

$$u \in H_0^1(D) \text{ で，すべての } \phi \in C_c^\infty(D) \text{ に対し } -\langle u, \phi \rangle_{H^1} = \langle f, \phi \rangle_{L^2} \text{ を満たすもの}$$

の存在と一意性を証明しましょう．まず $C_c^\infty(D)$ は $H_0^1(D)$ で稠密なので，ϕ の範囲は $H_0^1(D)$ に拡げても同値であることに注意します㊟．そこで $\phi \in H_0^1(D)$ に対して $\langle f, \phi \rangle_{L^2}$ を対応させる線型汎関数を考えると，Schwarz, Poincaré の不等式を順に使って

$$\begin{aligned} |\langle f, \phi - \psi \rangle_{L^2}| &\leq \|f\|_{L^2} \|\phi - \psi\|_{L^2} \\ &\leq C_D \|f\|_{L^2} \|\phi - \psi\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

[*5] ただし現時点では $L^2(D)$ の元として同じでも，$H_0^1(D)$ の元としては違うという，やや気持ちの悪い可能性が残っています．後の第 10 章で，実際にはそういうことはないことを示します．

となるので，$H^1_0(D)$ 上で連続です．従って Riesz の表現定理から，ただ一つの $v_f \in H^1_0(D)$ が存在して $\langle f, \phi\rangle_{L^2} = \langle v_f, \phi\rangle_{H^1}$ と H^1 内積で表現できます．これは $-v_f$ が Poisson 方程式の弱解であることを意味します． □

最後に方程式論の立場から重要な追加の性質を一つ示しておきます．二つの $f_1, f_2 \in L^2(D)$ に対し，上の証明の最後で示した $\langle f_j, \phi\rangle_{L^2} = \langle v_{f_j}, \phi\rangle_{H^1}$ $(j = 1, 2)$ で $\phi = v_{f_1} - v_{f_2}$ として，両辺の差を取ると

$$\langle f_1 - f_2, v_{f_1} - v_{f_2}\rangle_{L^2} = \|v_{f_1} - v_{f_2}\|^2_{H^1}$$

となります．さらに左辺に Schwarz, Poincaré の不等式を順に使うと

$$\begin{aligned}\|v_{f_1} - v_{f_2}\|^2_{H^1} &\le \|f_1 - f_2\|_{L^2}\|v_{f_1} - v_{f_2}\|_{L^2}\\ &\le C_D\|f_1 - f_2\|_{L^2}\|v_{f_1} - v_{f_2}\|_{H^1}\end{aligned}$$

となるので，結局 $\|v_{f_1} - v_{f_2}\|_{H^1} \le \|f_1 - f_2\|_{L^2}$ です．これは f_1, f_2 が $L^2(D)$ において近ければ，Poisson 方程式の弱解も $H^1_0(D)$ において近いということを意味しており，ある種の連続性です．このように与えられたデータに対して方程式の解が連続である性質は安定性や適切性と呼ばれ，応用上重要とされています．

2.3　いくつかの注意

弱解の概念の準備さえできれば，Poisson 方程式の境界値問題は Riesz の表現定理で鮮やかに解決できました．これは Hilbert がいわゆる Dirichlet 原理を正当化した議論の，一つの現代的な解釈です．

しかし繰り返しになりますが，弱解が元の微分方程式を普通の意味で満たすかどうかはわかっていないことには注意が必要です．微分可能性についてはすでに注意しましたが，境界条件に関しても $H^1_0(D) \subset L^2(D)$ しかわかっていないので，$u \in H^1_0(D)$ の零集合 ∂D 上での値に意味をつけることはできていません．これらの解決はいずれも Sobolev 空間論と呼ばれる理論で扱う内容で，それだけで大部の本をなす内容ですが，ここで扱った Poisson 方程式の場合に限れば，解の微分可能性は [黒田，§6.5]，ある意味で境界値を満たすことは [Lax, §7.2, Lemma 3] でも取り上げられています．

2.4　補遺：より一般の二階楕円型方程式

ここまでの議論をもう少し一般の微分方程式

$$\sum_{i,j=1}^{d} \tfrac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j}(x) \tfrac{\partial}{\partial x_j} u(x) = f(x) \tag{2.4.1}$$

に拡張することを考えましょう．係数 $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^d$ は対称行列で成分が有界関数と仮定し，さらにそれが定める二次形式が一様に正定値，つまりある $\lambda > 0$ が存在して

$$\text{任意の } v \in \mathbb{R}^d \text{に対し } \inf_x \langle v, A(x)v\rangle_{\mathbb{R}^d} \ge \lambda|v|^2 \tag{UE}$$

も仮定します[*6]．上の形では A が微分可能でないと方程式の意味がつかないように見えますが，弱解を考えるには必要ないことを見ます．方程式 (2.4.1) は $\nabla \cdot A\nabla u = f$ とも書くことができます．有界領域 $D \subset \mathbb{R}^d$ で境界条件 $u|_{\partial D} = 0$ をおいた境界値問題の弱解は，形式的に Gauss の発散定理を用いて，すべての $\phi \in C_c^\infty(D)$ に対して

$$-\langle A\nabla u, \nabla\phi\rangle_{L^2} = \langle f, \phi\rangle_{L^2} \tag{E}$$

が成り立つ $u \in H_0^1(D)$ として定義します．この定式化では A に微分がかからないので，有界可測くらいで意味がつくのも弱解の利点です．

このとき，次の結果は Poisson 方程式のときとほとんど同じ議論で示すことができます．

確認問題 2.4.1. A を一様楕円型と仮定して，(E) の弱解の存在と一意性を示せ．

より一般の偏微分方程式の弱解の存在と一意性を示す方法としては，Riesz の表現定理を拡張した Lax–Milgram の定理というものがあります．ただこれはいくつかの新しい概念と，それらへの慣れが必要なので，ここでは割愛します（[増田, 付録 5.1] または [Teschl, Section 2.3] 参照）．

[*6] 一般に A が非負定値のとき，上の方程式は楕円型であると言います．(UE) は一様楕円性 (uniform ellipticity) と呼ばれています．

第 3 章

微分・積分方程式と有界作用素

関数解析は歴史的には微分方程式の解法や，解の構造の解明に起源を持ちます．ここからの 4 章はそれを辿って関数解析の考え方と最初の成功を見ることにします．

3.1　微分方程式から積分方程式へ

唐突ですが区間 $[0,1]$ で以下の 2 階の常微分方程式を考えます：

$$f''(x)+a_1(x)f'(x)+a_2(x)f(x)=a_3(x).$$

2 階の線型常微分方程式の解空間は二次元なので，解を一意に決めるためには二つのデータを与える必要がありますが，標準的な設定として以下の二つがあります：

- 初期値問題：$f(0)=b_1,\ f'(0)=b_2$ を課す，
- 境界値問題：$f(0)=b_1,\ f(1)=b_2$ を課す．

これを積分方程式に書き直してみます（微分より積分のほうが関数解析的に扱いやすいからで，その理由は追々わかります）．そのために $g(x)=f''(x)$ とおいて $f'(x)=f'(0)+\int_0^x g(y)\mathrm{d}y$ と表し，さらにこれを使って

$$\begin{aligned}
f(x)&=f(0)+\int_0^x f'(z)\mathrm{d}z\\
&=f(0)+\int_0^x\left(f'(0)+\int_0^z g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z\\
&=f(0)+xf'(0)+\int_0^x\int_y^x g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
&=f(0)+xf'(0)+\int_0^x(x-y)g(y)\mathrm{d}y
\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

と書いてみます．上の $f(x)$ と $f'(x)$ の表示と $g(x)=f''(x)$ を最初の微分方程式に代入すると g と $f(0),f'(0)$ だけに関する方程式になります．

初期値問題の場合は $f(0), f'(0)$ が与えられているので，代入して整理するだけで

$$g(x) + \int_0^x (a_1(x) + x - y)g(y)\mathrm{d}y = a_3(x) - a_1(x)b_2 - a_2(x)(b_1 + b_2 x)$$

という積分方程式に帰着されます．このように積分の上端が変数になっているものを Volterra 型の積分方程式と呼びます．未知関数 g 以外をまとめて抽象的に書けば

$$g(x) - \int_0^x K(x, y)g(y)\mathrm{d}y = h(x) \tag{V}$$

という形の方程式ということになります．

境界値問題の場合は (3.1.1) で $x = 1$ として整理すると $f'(0) = f(1) - f(0) - \int_0^1 (1 - y)g(y)\mathrm{d}y$ となるので，$f'(0)$ は境界条件を使って表せます．ここで簡単のためにすべての x で $a_1(x) = 0$ として，最初の方程式に $f(x)$ の表示と $f''(x) = g(x)$ を代入すれば

$$\begin{aligned} &g(x) - \int_0^1 a_2(x)(x(1 - y)1_{[0,y]}(x) + y(1 - x)1_{(y,1]}(x))g(y)\mathrm{d}y \\ &\quad = a_3(x) - a_2(x)(b_1 + x(b_2 - b_1)) \end{aligned}$$

という積分方程式に帰着されます．このように積分が区間全体にわたるものを Fredholm 型の積分方程式と呼びます．抽象的に書けば

$$g(x) - \int_0^1 K(x, y)g(y)\mathrm{d}y = h(x) \tag{F}$$

という形の方程式ということになります．

3.2　積分方程式を線型代数的に捉える

関数解析では，ここまでに見た積分方程式を線型代数的に捉えようとします．まず方程式の解を探す空間を設定する必要がありますが，微分方程式に戻ると $f \in C^2[0, 1]$ とすることは自然なので，$g = f'' \in C[0, 1]$ から探すことにしてみましょう[*1]．このとき例えば $K(x, y)$ が $[0, 1]^2$ 上で 2 変数関数として連続であれば，とくに有界でもあるので積分

$$K_{\mathrm{V}}g(x) = \int_0^x K(x, y)g(y)\mathrm{d}y, \quad K_{\mathrm{F}}g(x) = \int_0^1 K(x, y)g(y)\mathrm{d}y$$

はいずれも意味を持ちます．そして Lebesgue の収束定理を使って容易に確かめられるようにこれらはいずれも連続関数になります㊟．

したがって K_{V}, K_{F} はいずれも $C[0, 1]$ からそれ自身への写像を定めます．さらに積分の線型性からこれらは線型写像になることもわかります．従って積分方程式 (V) と (F) を

$$(I - K_{\mathrm{V}})g = h, \quad (I - K_{\mathrm{F}})g = h$$

[*1] これは唯一絶対の枠組みではありません．二階微分の連続性までは要求しないこともありますし，微分を超関数的な意味で解釈する場合もあります．この講義でも後で $g \in L^2[0, 1]$ の設定に変えます．

と書き直すと（I は恒等写像），形式的には線型代数で学んだ有限次元線型空間 X の上の線型写像 $A\colon X \to X$ に対する $Ax = b$ という方程式と同じ形です．そのときは $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ ならば解は一意であることや，そのとき準同型定理により実は $\mathrm{Ran}(A) = X$ となるので[*2]すべての $b \in X$ に対して解が存在することも知っていると思います．これが $C[0,1]$ のような無限次元の空間でどうなるかを調べるのが，関数解析という学問の一つの起源です．

3.3 無限次元線型代数の難しさ

線型代数の理論を無限次元空間に拡張するのは，実はかなり注意を要する問題です．例えばもっとも身近な「n 次正方行列 A が数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ からそれ自身への線型写像を定める」という設定を安直に無限次元化するのは，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

が定義できないことから不可能です．

これを修正する方法はいくつかあって，例えば上の無限行列の場合は作用させるベクトルを $\ell^1(\mathbb{N})$ に限ればいつでも定義できます．あるいは行列の方を各行 $(a_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ が $\ell^1(\mathbb{N})$ に属する数列になっていて $\|a_{i,\cdot}\|_1$ が有界とすると，$\ell^\infty(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ の写像としては定義できます．このように，無限次元の線型空間で線型写像を考えるときには，考える空間を制限したり，ある特殊なクラスの線型写像に制限して考えたり，ということが必要になります．積分方程式の設定を思い出してみても，関数空間を $C[0,1]$ に限って，さらに $K(x,y)$ が $[0,1]^2$ 上で 2 変数関数として連続という仮定を置いたから上手く行ったのでした．

次の問題は逆写像に関するものです．有限次元線型空間の間の線型写像 A に対しては，$A \circ B = I$ となる写像 B が存在すれば $B \circ A = I$ も成り立ちます．ところが数列 $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，2 つのずらし作用素[*3]を

$$La = (a_2, a_3, \ldots), \quad Ra = (0, a_1, a_2, \cdots)$$

で定めると $L \circ R = I$ ですが $R \circ L \neq I$ です．右逆元と左逆元は，有限次元の線型代数では区別する必要がないので意識しなかったと思いますが，概念的にはかなり異なるものであることを次の章で触れます．

もう一つの微妙な問題点は，「線型写像が連続とは限らない」ということです．これは第 1 章で基底の係数を例として見ましたが，もう少しなじみのある例も挙げておきます．例えば微分作用素 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\colon C^1[0,1] \to C[0,1]$ は線型写像ですが，$C^1[0,1]$ を単純に $C[0,1]$ の部分空間と見て $\|\cdot\|_\infty$ でノルムを

[*2] $\mathrm{Ran}(A)$ は A の値域で，$\mathrm{Im}(A)$ と書くこともあります．

[*3] 関数解析学では伝統的に線型写像のことを線型作用素といいます．この講義でも少しずつ切り替えていきます．

定めると $n \to \infty$ において

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx\right| \to 0,$$
$$\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx\right| = \sup_{x\in[0,1]}\left|\sqrt{n}\cos nx\right| \to \infty$$

なので連続ではありません（これが微分が積分より扱いにくい理由の一つです）．この作用素は $C^1[0,1]$ のノルムを $\|f\|_\infty + \|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\|_\infty$ に取り替えると連続になりますが，ともかくノルムを注意深く選ばないと連続性は成り立たないわけで，有限次元のノルム空間では線型写像は自動的に連続になること㊎と比べると際立った違いがあると言えます．

積分方程式に出てきた K_V と K_F はどちらも連続な線型作用素になることを確かめてみます．考える空間は $C[0,1]$ だったので，ノルムは $\|\cdot\|_\infty$ を使うことにします．線型写像なので 0 での連続性，つまり $\|g\|_\infty \to 0$ ならば $\|K_\mathrm{V}g\|_\infty, \|K_\mathrm{F}g\|_\infty \to 0$ であることを示せば十分です㊓．例えば K_V について考えると，

$$\begin{aligned}\|K_\mathrm{V}g\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x K(x,y)g(y)\mathrm{d}y\right| \\ &\le \int_0^1 \sup_{x,y\in[0,1]}|K(x,y)| \sup_{y\in[0,1]}|g(y)|\mathrm{d}y \\ &= \sup_{x,y\in[0,1]}|K(x,y)|\|g\|_\infty\end{aligned}$$

ですが，K は $[0,1]^2$ 上で連続と仮定したので $\sup_{x,y\in[0,1]}|K(x,y)| < \infty$ であり，したがって右辺は $\|g\|_\infty \to 0$ で 0 に収束します．もう一つの K_F についても議論は全く同じです．

いま示した $\|K_\mathrm{V}g\|_\infty \le C\|g\|_\infty$ は，線型写像の“拡大率”が作用させるベクトルに無関係に C でおさえられるということで，これを線型写像の有界性といいます．

定義 3.3.1. ノルム空間の間の線型作用素 $T\colon (X,\|\cdot\|_X) \to (Y,\|\cdot\|_Y)$ は，ある $C > 0$ が存在して，すべての $x \in X$ に対して $\|Tx\|_Y \le C\|x\|_X$ となるとき有界であるという．また

$$\|T\|_\mathrm{op} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

を T の作用素ノルムという[*4]．したがって線型作用素が有界であるとは，その作用素ノルムが有限であるということである．

「有界 $\Rightarrow$ 連続」は既に見ましたが，実は逆も成り立ちます㊓．

3.4　積分作用素を L^2 で考えた場合

最後に $C[0,1]$ とは異なる空間での有界作用素の例を挙げておきます．$K(x,y)$ を二変数関数と見て $K \in L^2([0,1]^2)$ であるとすると，積分作用素 K_V, K_F は $(L^2[0,1],\|\cdot\|_2)$ からそれ自身への有界線型作用

[*4] 有界線型作用素全体の空間でノルムになっていることは後で確かめます．

素になります．これは例えば K_{F} なら，Schwarz の不等式と Fubini の定理を使って

$$\begin{aligned}\|K_{\mathrm{F}}g\|_2^2 &= \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x,y)g(y)\mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2 \mathrm{d}y \right) \left(\int_0^1 |g(y)|^2 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \, \|g\|_2^2\end{aligned}$$

とすれば，$\|K_{\mathrm{F}}g\|_2 \leq \|K\|_2\|g\|_2$ となることからわかります．K_{V} についても議論は同じです．

実は第 5 章以降で K_{V}, K_{F} は単に有界であるだけでなく，特別に良い性質を持っていることが明らかになります．

第 4 章

不動点定理と Neumann 級数

積分方程式を関数のなす線型空間における方程式と解釈する最低限の準備ができたので，二通りの方法で解の存在と一意性を議論してみます.

4.1 Banach の不動点定理

1つ目の方法は，次の定理を使います．陰関数定理や逆関数定理，常微分方程式の解の存在定理などの証明で見たことのある人もいるかも知れません.

定理 4.1.1 (Banach の不動点定理)**.** 完備距離空間 (X,d) からそれ自身への写像 F に対して，ある $0 \leq \kappa < 1$ が存在してすべての $x, y \in X$ に対して

$$d(F(x), F(y)) \leq \kappa d(x,y)$$

が成り立つとする（縮小写像という）．このとき $F(x) = x$ を満たす点が唯一つ存在する.

簡単な例は $X = \mathbb{R}^n$ において $x \mapsto Ax + b$（A は行列，b はベクトル）を考え，A が対角行列で固有値の絶対値がすべて 1 より小さいときです．さらに $b = 0$ なら $A^n x \xrightarrow{n\to\infty} 0$ でこの極限の 0 が不動点ですが，一般の場合の証明もこれに似た方針で行います.

Banach の不動点定理の証明. $x_0 \in X$ を任意にとって点列を $x_n = F^n(x_0)$ (F^n は F の n 回合成を表す) によって定めると，$m < n$ に対して

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \kappa^m d(x_0, x_1) + \cdots + \kappa^{n-1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

だから Cauchy 列です．(X,d) は完備と仮定したので $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ が存在します．ここで縮小写像は連続であること㊟に注意すると，$x_{n+1} = F(x_n)$ において $n \to \infty$ とすることで $x_\infty = F(x_\infty)$ がわかります.

一意性は $y \in X$ も不動点だとすると

$$d(y, x_\infty) = d(F^n(y), F^n(x_\infty)) \leq \kappa^n d(y, x_\infty) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

であることからわかります. □

積分方程式の問題において $\sup_{x,y\in[0,1]^2}|K(x,y)| < 1$ を仮定して，$g,h \in C[0,1]$ に対し $F(g) = K_*g + h$（$*$ は V または F）と定めると

$$\begin{aligned}\|F(g_1) - F(g_2)\|_\infty &= \|K_*g_1 - K_*g_2\|_\infty \\ &\leq \sup_{x,y\in[0,1]^2}|K(x,y)|\|g_1 - g_2\|_\infty\end{aligned}$$

だったので，F は縮小写像になります．したがって Banach の不動点定理により $C[0,1]$ 内にただ一つ $g = F(g)$ となる元が存在しますが，この式は $g = K_*g + h$ と書き直せるので，これで積分方程式の解の存在と一意性が証明できました．

Banach の不動点定理の証明では写像の任意回数の合成を使っていて，そのために F が X からそれ自身への写像であることが必要です．ここに微分方程式を積分方程式に変換したことが生きています．微分作用素は，例えば有界作用素にしようとすると定義域と値域が異なる空間になってしまいます[*1]．

4.2　Volterra 型の特殊事情

Volterra 型の場合は $\sup_{x,y\in[0,1]^2}|K(x,y)| < 1$ の仮定は必要ないことが，次のようにしてわかります．関数 $g_1, g_2 \in C[0,1]$ に前の F を n 回作用させて差をとると（$+h$ の項がいつも相殺することに注意して），

$$\begin{aligned}F^n(g_1) - F^n(g_2) &= K_{\mathrm{V}}F^{n-1}(g_1) - K_{\mathrm{V}}F^{n-1}(g_2) \\ &= \cdots \\ &= K_{\mathrm{V}}^n(g_1 - g_2)\end{aligned}$$

となります．ここで K_{V} の n 回合成については

$$\begin{aligned}|K_{\mathrm{V}}^n g(x_0)| &= \left|\int_0^{x_0}\cdots\int_0^{x_{n-1}}\left(\prod_{j=0}^{n-1}K(x_j,x_{j+1})\right)g(x_n)\mathrm{d}x_n\cdots\mathrm{d}x_1\right| \\ &\leq \sup_{x,y\in[0,1]}|K(x,y)|^n\|g\|_\infty\int_0^{x_0}\cdots\int_0^{x_{n-1}}\mathrm{d}x_n\cdots\mathrm{d}x_1\end{aligned}$$

と評価できますが，この最後の積分は $\frac{1}{n!}$ 以下なので，十分大きな n に対しては F^n が縮小写像であることがわかります．したがって Banach の不動点定理から $F^n(g) = g$ となる $g \in C[0,1]$ がただ一つ存在しますが，これが実は F の不動点になっています．実際

$$\begin{aligned}\|g - F(g)\|_\infty &= \|F^{mn}g - F\circ F^{mn}(g)\|_\infty \\ &= \|F^{mn}g - F^{mn}\circ F(g)\|_\infty \\ &\xrightarrow{m\to\infty} 0.\end{aligned}$$

ですが，左辺は m とは無関係なので 0 であるしかありません．一意性も同様に，二つあったとして $\|g_1 - g_2\|_\infty = \|F^{mn}g_1 - F^{mn}g_2\|_\infty$ を考えることでわかります．

[*1] 正確に言えば，積分作用素の場合も異なる空間と考える方が自然な場合はあるのですが，値域の方が定義域より狭くなるから問題を起こさないのです．

Fredholm 型の積分方程式については，上の議論で $\frac{1}{n!}$ になった多重積分が小さくなるとは限らない（考える区間を一般にすると発散する場合もある）ので，この議論は通用しません．その場合にどこまで線型代数の類似ができるかは次章以降に扱います．

4.3 Neumann 級数の方法

次に有界作用素の空間の構造に関する定理を一つ紹介して，前の節までと同じ結果を別の方法で示してみます．

定理 4.3.1. Banach 空間 $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ に対し，有界線型写像 $T\colon X \to Y$ がなす集合を $\mathcal{L}(X,Y)$ とすると線型空間であり，$(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ は Banach 空間になる[*2]．

証明は概略だけ述べます．任意の $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $x \in X$ に対して，三角不等式や作用素ノルムの定義を使って

$$\|(c_1T_1 + c_2T_2)x\|_Y \leq (|c_1|\|T_1\|_{\mathrm{op}} + |c_2|\|T_2\|_{\mathrm{op}})\|x\|_X$$

がわかります㊮．これは $\|c_1T_1 + c_2T_2\|_{\mathrm{op}} \leq |c_1|\|T_1\|_{\mathrm{op}} + |c_2|\|T_2\|_{\mathrm{op}} < \infty$ を意味するので $c_1T_1 + c_2T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$ となり，$\mathcal{L}(X,Y)$ が線型空間であることがわかります．

さらにこの評価で $c_1 = c_2 = 1$ とすれば $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ が三角不等式を満たすこともわかります．$\|T\|_{\mathrm{op}} = 0$ が $T = 0$ と同値であることと，すべての $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $c \in \mathbb{C}$ に対して $\|cT\|_{\mathrm{op}} = |c|\|T\|_{\mathrm{op}}$ が成り立つことは容易にわかるので，$\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ はノルムになります．

最後に完備性ですが，$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ の Cauchy 列とすると，任意の $x \in X$ に対して

$$\|T_mx - T_nx\|_Y \leq \|T_m - T_n\|_{\mathrm{op}}\|x\|_X$$

だから $(T_nx)_{n\in\mathbb{N}}$ は Banach 空間 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ の Cauchy 列です．したがって $T_\infty x = \lim_{n\to\infty} T_nx$ が存在し，こうして定めた $T_\infty\colon X \to Y$ は線型写像になります．これが有界作用素であることは，ノルムの連続性を使って

$$\|T_\infty x\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|T_nx\|_Y \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathrm{op}}\|x\|_X$$

として，距離空間の Cauchy 列は有界であることを使えばわかります． □

次の定理は，複素関数として $|z| < 1$ に対して $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ であることの，線型作用素に対する類似です．

定理 4.3.2. T を Banach 空間 $(X, \|\cdot\|)$ からそれ自身への線型作用素で $\|T\|_{\mathrm{op}} < 1$ を満たすものとする．このとき $(I - T)$ には左右からの逆写像が存在し，両方とも $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ で与えられる有界線型作用素である．

[*2] $\mathcal{L}(X,Y)$ は統一された記号ではなく，$\mathcal{B}(X,Y)$ や $B(X,Y)$ と書く文献もあります．

これも証明は概略だけにします．まず作用素ノルムの定義から $\|T^n\|_{\mathrm{op}} \leq \|T\|_{\mathrm{op}}^n$ がわかる㊟ので，仮定 $\|T\|_{\mathrm{op}} < 1$ の下で $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ は絶対収束級数です[*3]．$(X, \|\cdot\|_X)$ が Banach 空間なら $(\mathcal{L}(X,X), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ も Banach 空間であることと，Banach 空間の絶対収束級数は極限を持つことを思い出すと，$\sum_{n=0}^{N} T^n$ は $N \to \infty$ である $S \in \mathcal{L}(X,X)$ に収束します．

あとはこの S が $(I-T)$ の左右からの逆写像になっていることを確かめればよいわけです．任意の $x \in X$ に対して，

$$\begin{aligned}(I-T)\sum_{n=0}^{N} T^n x &= \sum_{n=0}^{N}(T^n x - T^{n+1}x) \\ &= x - T^{N+1}x\end{aligned}$$

と書いて $N \to \infty$ とすると，左辺は $I-T$ の連続性から $(I-T)Sx$ に収束し，右辺は x に収束します．したがって $(I-T)Sx = x$，つまり S は $I-T$ の右逆写像です．左逆写像であることも同様です．　□

この定理に現れる作用素の級数 $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ を Neumann 級数といいます．$I-T$ の逆写像を求めることは $x = Tx + b$ を解くことと同じなので，

$$x = Tx + b = T(Tx+b) + b = \cdots = T^{N+1}x + \sum_{n=0}^{N} T^n b$$

とすれば “発見” した気分になることもできます．

前と同じ仮定 $\sup_{x,y\in[0,1]^2} |K(x,y)| < 1$ の下で $\|K_*\|_{\mathrm{op}} < 1$（$*$ は V か F）でしたから，上の定理から $\sum_{n=0}^{\infty} K_*^n$ が両側からの逆元の意味で $(I-K_*)^{-1}$ です．そこでまず右逆元であることを使うと，

$$(I-K_*)\left(\sum_{n=0}^{\infty} K_*^n\right)h = h$$

なので $(\sum_{n=0}^{\infty} K_*^n)h$ が一つの解であることがわかります．一方で左逆元であることを使うと，方程式の両辺に $\sum_{n=0}^{\infty} K_*^n$ を左から作用させて

$$(I-K_*)g = h \Rightarrow g = \left(\sum_{n=0}^{\infty} K_*^n\right)h$$

となるので解はこれしかないこともわかります．

このように右逆写像は解の存在，左逆写像は解の一意性に関わっていて，概念的にはかなり違うものです．

[*3] その意味は $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|_{\mathrm{op}} < \infty$ です．「関数解析入門」を復習．

4.4 二つの方法の利点について

この章では積分方程式の解の存在と一意性を二つの方法で議論しました．Neumann 級数の方法は $\sum_{n=0}^{N} K_*^n h$ という有限の手続きで近似解を求めることができ，さらに

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} K_*^n h - \sum_{n=0}^{N} K_*^n h \right\|_\infty \leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} K_*^n \right\|_{\mathrm{op}} \|h\|_\infty \leq \frac{\|K_*\|_{\mathrm{op}}^{N+1}}{1 - \|K_*\|_{\mathrm{op}}} \|h\|_\infty$$

という，単純で収束の速い誤差評価がある点でも優れています．

一方で不動点定理を使う方法は，少なくとも形式的には方程式が線型であることを前提にしておらず，非線形の方程式でも適当な縮小写像 F の不動点として表現できさえすれば適用可能であるという利点があります．

演習問題 4.4.1. $C^2[0,1]$ において $u'' + \lambda \sin u = 0$ を境界条件 $u(0) = u(1) = 0$ の下で考えると，十分小さい $\lambda > 0$ に対しては一意解が存在することを不動点定理を使って示せ．その解は何か？

4.5 Riesz の表現定理再考

第 1 章の Riesz の表現定理の説明で，共役空間 H' は集合としては H と同じであると述べました．この章の定理 4.3.1 によって，$H' = \mathcal{L}(H, \mathbb{C})$ も作用素ノルム $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ によって Banach 空間になることがわかったので，今度は「Banach 空間として同じか」という問題を考えることができます．

答えは YES で，$\phi \in H'$ の表現 $\phi(x) = \langle x, h_\phi \rangle$ に対して，まず Schwarz の不等式を使えば

$$|\phi(x)| = |\langle x, h_\phi \rangle| \leq \|x\|_H \|h_\phi\|_H$$

なので $\|\phi\|_{\mathrm{op}} \leq \|h_\phi\|_H$ です．一方で $x = h_\phi$ として作用素ノルムの定義を使えば

$$\|\phi\|_{\mathrm{op}} \|h_\phi\|_H \geq |\phi(h_\phi)| = |\langle h_\phi, h_\phi \rangle| = \|h_\phi\|_H^2$$

となって $\|\phi\|_{\mathrm{op}} \geq \|h_\phi\|_H$ がわかります．したがって $\|\phi\|_{\mathrm{op}} = \|h_\phi\|_H$，つまり $\phi \mapsto h_\phi$ はノルムを保つ写像です．これによって H' に Hilbert 空間の構造が入ることもわかります㊫．

ただし「Banach 空間として同じか」という問いを，「ノルム空間として同型か」と解釈すると，些細な問題を一つ解決しておく必要があります．それは Riesz の表現定理から得られる $H' \ni \phi \mapsto h_\phi \in H$ という全単射が線型写像ではないということです．実際，内積の共役線型性から，$c \in \mathbb{C}$ に対して $h_{c\phi} = \bar{c} h_\phi$ でなければならないことがわかります．これを解消して線型写像にするのは簡単で，H の代数的基底 E をとって，写像 $\iota\colon H \to H$ を

$$x = \sum_{e \in E} c_e(x) e \mapsto \iota(x) = \sum_{e \in E} \overline{c_e(x)} e$$

と定めておいて $\iota \circ h$ を考えれば，これは $H' \to H$ の線型同型写像になります．

この h や ι のような写像は共役線型写像と呼ばれることがあり，線型写像とは少し違うものです．ただし，ここで見たように ι を使っていつでも線型写像にできるので，わざわざそうしなくても「全単射共役線型写像があれば線型空間として同じ」と見なすことに問題はないと思います．

第 5 章

有限階作用素とコンパクト作用素

ここからは Fredholm 型積分方程式の可解性についてさらに調べるために，コンパクト作用素という概念に向けて準備をしていきます．どういう結果を目指しているかを知るために，線型代数を少し復習します．

5.1 線型方程式の解の構造：有限次元と無限次元の違い

線型空間 X からそれ自身への線型写像 A に対しては

$$\mathrm{Ker}(A) = \{0\} \Leftrightarrow Ag = h \text{ の解は一意},$$
$$\mathrm{Ran}(A) \ni h \Leftrightarrow Ag = h \text{ の解が存在}$$

となっていて，より一般に $\mathrm{Ker}(A)$ は解の非一意性の程度を測り，$\mathrm{Ran}(A)$ は解の存在しやすさを測っていると言えます．ここで X が有限次元なら準同型定理の結論 $\mathrm{Ran}(A) \simeq X/\mathrm{Ker}(A)$ から $\mathrm{Ker}(A) \simeq X/\mathrm{Ran}(A)$ がわかるので㊟，線型方程式 $Ag = h$ の一意性への障害と存在への障害はある意味で同じであることになります．とくに解が一意であること（$\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$）とすべての h に対して解が存在すること（$\mathrm{Ran}(A) = X$）は同値です．

無限次元の線型空間 X に対しても準同型定理は成り立ちますが，そこから $\mathrm{Ker}(A) \simeq X/\mathrm{Ran}(A)$ を導くことは一般にはできません．例えば数列 $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ に対して $Ra = (0, a_1, a_2, \cdots)$ で定めると

$$\mathrm{Ker}(R) = \{0\} \not\simeq \{(a_1, 0, \ldots) \colon a_1 \in \mathbb{C}\} = \ell^1(\mathbb{N})/\mathrm{Ran}(R)$$

です．また R は明らかに全射ではありません．

念のため準同型定理の結論も確認すると

$$\mathrm{Ran}(R) = \{(0, a_1, a_2, \ldots) \colon (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})\} \simeq \ell^1(\mathbb{N})/\mathrm{Ker}(R) = \ell^1(\mathbb{N})$$

ですが，これは実際に $La = (a_2, a_3, \ldots)$ が同型写像になっているので，問題ありません．問題は $\mathrm{Ran}(R)$ が $\ell^1(\mathbb{N})$ と「同型である」ことから「同じである」ことが導けないことです．これは有限次元でも起こり得ることですが，上のように部分空間が全空間と同型でないのは，無限次元特有のことです．このような

事情から，無限次元の線型空間では「同型であること」と「同じであること」を区別する必要があることが多くなります．

5.2 “有限階” 作用素

ここからしばらくは積分方程式の抽象化である $A = I - K$ に対して，有限次元の線型代数の結果を一般化することを目標にします．前の章の Neumann 級数を思い出してもわかるように，K がある意味で “小さい” ときは状況はよく，その一つの表現として Hilbert 空間の「コンパクト作用素」というクラスの K に対して，有限次元と同じ

$$\mathrm{Ker}(I-K) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Ran}(I-K) = X$$

が成り立つことを示します．最初に次のようなクラスの作用素から初めます：

定義 5.2.1. Hilbert 空間 $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ からそれ自身への線型作用素 K で，有界かつ $\dim \mathrm{Ran}(K) < \infty$ を満たすものの全体を $\mathcal{L}_{\mathrm{f}}(H)$ と書く[*1]．

このような作用素を考える動機は，歴史に見出すことができます．Fredholm の先行研究を受けて，Hilbert は積分方程式を $g, h \in L^2[0,1]$ の設定で研究しましたが，その出発点は $K \in L^2([0,1]^2)$ を仮定して，$L^2[0,1]$ の完全正規直交系 $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ を用いて

$$K(x,y) = \sum_{j,k=1}^{\infty} c_{j,k}\phi_j(x)\phi_k(y)$$

と展開することでした（展開の正当性はこの章の最後で示します）．これを有限和で打ち切った

$$K_n(x,y) = \sum_{j,k=1}^{n} c_{j,k}\phi_j(x)\phi_k(y)$$

が定める積分作用素は有界な有限階作用素になりますが㊟，それに対して示した結果をより一般の積分作用素に拡張するというのが Hilbert が提案した方法で，この講義もその道筋に従います．

5.3 有限階作用素に対する Fredholm の択一

$K \in \mathcal{L}_{\mathrm{f}}(H)$ のときは以下の通り，有限次元の類似が成り立ちます．

定理 5.3.1. $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は Hilbert 空間とし，$K \in \mathcal{L}_{\mathrm{f}}(H)$ とすると，$I-K$ が単射であることと全射であることは同値である．さらに $I-K$ が全単射であるときには，逆作用素 $(I-K)^{-1}$ は有界線型作用素になる．

Fredholm はこれを方程式論の言葉で，「非斉次方程式 $(I-K)g = h$ がすべての h に対して解を持つかどうかは，斉次方程式 $(I-K)g = 0$ が非自明解を持つかどうかに応じてどちらかに決まる」と表現し

[*1] 単に有限階作用素と呼ぶこともありますが，そのときも有界性を仮定することに注意してください．また $\mathcal{L}_{\mathrm{f}}(H)$ という記号は標準的ではなく，$\mathcal{B}_{00}(X,Y)$ や $B_{00}(X,Y)$ と書く文献もあります．

たので，この定理は「Fredholm の択一」と呼ばれています．$(I-K)^{-1}$ の有界性が結果に加わっていますが，これは微分・積分方程式の理論において重要な結果です．方程式 $(I-K)g=h$ において，h は入力，$g=(I-K)^{-1}h$ は出力にあたります．作用素 $(I-K)^{-1}$ が有界，したがって連続であるということは，例えば入力に少し誤差があっても出力は真の解から大きくはズレないということ（適切性）を意味します．

Fredholm の択一（有限階）の証明. $\dim \mathrm{Ran}(K)=n$ とします．$\mathrm{Ran}(K)$ の正規直交基底 $\{e_j\}_{j=1}^n$ をとって

$$Kg=\sum_{j=1}^n f_j(g)e_j$$

と表すと，係数 $f_j(g)=\langle Kg,e_j\rangle$ は線型汎関数で，K の有界性と Schwarz の不等式により $|\langle Kg,e_j\rangle|\le \|K\|_{\mathrm{op}}\|g\|$ となるので有界です．したがって Riesz の表現定理によって $f_j(g)=\langle g,e_j^*\rangle$ と書けます．この $\{e_j^*\}_{j=1}^n$ は線型独立になります．実際，もしそうでないとすると $e_n^*=\sum_{j=1}^{n-1}c_je_j^*$ と表せますが，このとき

$$Kg=\sum_{j=1}^n\langle g,e_j^*\rangle e_j=\sum_{j=1}^{n-1}\langle g,e_j^*\rangle e_j+\sum_{j=1}^{n-1}c_j\langle g,e_j^*\rangle e_n$$

となって，右辺はどんな g に対しても $\{e_j+c_je_n\}_{j=1}^{n-1}$ で生成される $(n-1)$ 次元部分空間に含まれるので，$\dim\mathrm{Ran}(K)=n$ に反します．

ここまでで得た $Kg=\sum_{j=1}^n\langle g,e_j^*\rangle e_j$ を使って方程式 $(I-K)g=h$ を書き直すと $g=\sum_{j=1}^n\langle g,e_j^*\rangle e_j+h$ となるので，解 g は $\mathrm{span}(\{e_j\}_{j=1}^n)+h$ の中にあります．したがって $g=\sum_{j=1}^n a_je_j+h$ の係数 $a=(a_j)_{j=1}^n$ を求める問題と思うことができて，$(I-K)g=h$ は

$$\sum_{j=1}^n a_je_j-\sum_{k,j=1}^n a_k\langle e_k,e_j^*\rangle e_j=\sum_{j=1}^n\langle h,e_j^*\rangle e_j$$

と同値になります．ここで e_j の係数比較をして，$a=(a_j)_{j=1}^n$ の方程式として書き直すと，以下の有限次元数ベクトル空間の線型方程式に帰着されます：

$$\left(I-\left(\overline{\langle e_j^*,e_k\rangle}\right)_{j,k=1}^n\right)a=\left(\langle h,e_j^*\rangle\right)_{j=1}^n. \tag{FD}$$

まず $I-K$ が単射，つまり $\mathrm{Ker}(I-K)=\{0\}$ とすると，(FD) で $h=0$ とした方程式も 0 以外の解を持たないので，有限次元の線型代数の結果から

$$\mathrm{Ker}\left(I-\left(\overline{\langle e_j^*,e_k\rangle}\right)_{j,k=1}^n\right)=\{0\}\Leftrightarrow\mathrm{Ran}\left(I-\left(\overline{\langle e_j^*,e_k\rangle}\right)_{j,k=1}^n\right)=\mathbb{C}^n,$$

したがって (FD) はすべての $h\in H$ に対して解を持ちます．その解から $(I-K)g=h$ となる g も作れるのでしたから，$I-K$ は全射です．

次に $I-K$ が全射とすると (FD) もすべての h に対して解を持ちます．(FD) の右辺 $(\langle h,e_j^*\rangle)_{j=1}^n$ は一見特殊に見えますが，$\{e_j^*\}_{j=1}^n$ が線型独立だったことを思い出すと，実際には $h\in H$ を動かすことで

$\mathbb{C}^n$ 全体を動くので㊦，$(I-(\overline{\langle e_j^*, e_k\rangle})_{j,k=1}^n)$ も全射であることがわかります．すると再び上の有限次元の線型代数の結果を使って $\mathrm{Ker}(I-(\overline{\langle e_j^*, e_k\rangle})_{j,k=1}^n)=\{0\}$ となるので，$(I-K)g=0$ の解も 0 しかなく，$I-K$ は単射になります．

最後に $(I-K)^{-1}$ が存在する場合にどのように $g=(I-K)^{-1}h$ が作られるか思い出すと，

$$h \xrightarrow{(\langle\cdot, e_j^*\rangle)_{j=1}^n} (\langle h, e_j^*\rangle)_{j=1}^n \xrightarrow{(I-(\overline{\langle e_j^*, e_k\rangle})_{j,k=1}^n)^{-1}} (a_j)_{j=1}^n \to \sum_{j=1}^n a_j e_j + h$$

となっていて，上の三つの手続き（内積を取る，有限次元の線型写像，線型結合を作る）はすべて連続なので $(I-K)^{-1}$ は連続，したがって有界作用素であることがわかります． □

$I-K$ が単射でないときでも，上の証明の (FD) が $(I-K)g=h$ と同値であったことから，$\dim\mathrm{Ker}(I-K)<\infty$ はわかります．この事実は，あとで対角化の一般化を議論するときに使います．

進んだ注：途中から随伴行列 $(\overline{\langle e_j^*, e_k\rangle})_{j,k=1}^n$ が主役になっていますが，これはこの理論をもう少し整備するときに共役作用素を使うと見通しよくできることと関係しています．

5.4　積分作用素のコンパクト性

ここまでの結果をもう少し一般の作用素に拡張するため，Fredholm の積分方程式に現れる積分核が $K(x,y)\in L^2([0,1]^2)$ を満たすならば，関数としては $K_n(x,y)=\sum_{j,k=1}^n c_{j,k}\phi_j(x)\phi_k(y)$ で近似できたことを思い出します．これは以下のように作用素としての近似にもなります．

補題 5.4.1. $K_n, K\in L^2([0,1]^2)$ が定める Fredholm 型の積分作用素 $K_{n,\mathrm{F}}, K_{\mathrm{F}}\colon L^2[0,1]\to L^2[0,1]$ について $\|K_{n,\mathrm{F}}-K_{\mathrm{F}}\|_{\mathrm{op}}\le\|K_n-K\|_2$.

Proof. これは簡単で，$f\in L^2[0,1]$ に対して Schwarz の不等式を使って

$$\begin{aligned}\|(K_{n,\mathrm{F}}-K_{\mathrm{F}})f\|_2^2 &= \int\left|\int (K(x,y)-K_n(x,y))f(y)\mathrm{d}y\right|^2\mathrm{d}x\\ &\le \int\left(\int |K(x,y)-K_n(x,y)|^2\mathrm{d}y\right)\|f\|_2^2\mathrm{d}x\\ &= \|K-K_n\|_2^2\|f\|_2^2\end{aligned}$$

とするだけです． □

これを動機にして次のような定義をします．

定義 5.4.2. Hilbert 空間 $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ からそれ自身への線型作用素 K は，$\mathcal{L}_{\mathrm{f}}(H)$ に属する作用素の列 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して $\|K_n-K\|_{\mathrm{op}}\to 0$ $(n\to\infty)$ となるときにコンパクト作用素といい，そのような作用素の全体を $\mathcal{L}_{\mathrm{c}}(H)$ と書く[*2].

[*2] これも標準的な記法ではなく $\mathcal{K}(H)$, $\mathcal{B}_0(H)$, $B_0(H)$ のように書く文献もあります．

ここで一つ厄介な注意があって，コンパクト作用素の現代的な定義はこれとは違います[*3]．Hilbert 空間の場合には結局同じであることがわかるのですが，Banach 空間の場合には一致しない場合があります[*4]．しかしともかくこれが作用素が “小さい” ということの一つの表現です．とくにコンパクト作用素が有界であることは容易にわかります㊦．

5.5 Riesz–Schauder の理論：Hilbert 空間の場合

次がこの章の主結果で，前の結果がコンパクト作用素までは拡張できることを示します．必要なことはすべて準備してあるので，証明は簡単です．

定理 5.5.1. $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を Hilbert 空間とし，$K \in \mathcal{L}_{\mathrm{c}}(H)$ とすると，$I-K$ が単射であることと全射であることは同値である．さらに $I-K$ が全単射であるときには，逆作用素 $(I-K)^{-1}$ は有界線型作用素になる．

Proof. コンパクト作用素の定義から $K_{\mathrm{f}} \in \mathcal{L}_{\mathrm{f}}(H)$ を $\|K-K_{\mathrm{f}}\|_{\mathrm{op}} < 1$ となるように取ることができます．このとき $I-(K-K_{\mathrm{f}})$ は第 4 章の定理 4.3.2 により全単射であり，$(I-(K-K_{\mathrm{f}}))^{-1}$ が有界線型作用素として存在したことを思い出しましょう（Neumann 級数を使って書けるのでした）．すると $I-K$ の代わりに

$$(I-(K-K_{\mathrm{f}}))^{-1}(I-K) \tag{P}$$

を考えても「単射，全射，逆が連続」の三つの性質は変わりません．この (P) の作用素を

$$\begin{aligned}(I-(K-K_{\mathrm{f}}))^{-1}(I-K) &= (I-(K-K_{\mathrm{f}}))^{-1}(I-(K-K_{\mathrm{f}})-K_{\mathrm{f}}) \\ &= I-(I-(K-K_{\mathrm{f}}))^{-1}K_{\mathrm{f}}\end{aligned}$$

と書くと，第二項は有界な有限階作用素なので㊦定理 5.3.1 が適用できて単射性と全射性は同値，さらに全単射のときは逆が有界です． □

上の証明と 5.3 節の最後に述べたことから

$$\dim \mathrm{Ker}(I-K) = \dim \mathrm{Ker}(I-(I-(K-K_{\mathrm{f}}))^{-1}K_{\mathrm{f}}) < \infty$$

もわかります．これを次の章の固有関数展開の議論で使います．

大変な議論でしたが，Fredholm 型の積分方程式を $L^2[0,1]$ で考えた場合には，補題 5.4.1 で示したように K_{F} はコンパクトなので，「解の存在と一意性は同値である」という結果が成り立つことが証明できたわけです．

5.6 補遺：$L^2([0,1]^2)$ の完全正規直交系

この章で使った以下の事実の証明を与えます．

[*3] 現代的には「任意の有界集合の像が相対コンパクトであること」を定義とします．

[*4] ただし $C[0,1]$ や $L^p(\mathbb{R}^d)$ など多くの Banach 空間では一致します．このことは第 13 章で証明します．

補題 5.6.1. $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ を $L^2[0,1]$ の完全正規直交系として

$$\phi_j \otimes \phi_k(x,y) = \phi_j(x)\phi_k(y)$$

と定めると，$\{\phi_j \otimes \phi_k\}_{j\in\mathbb{N}}$ は $L^2([0,1]^2)$ の完全正規直交系である．つまり任意の $K \in L^2([0,1]^2)$ に対して

$$c_{j,k} = \int_{[0,1]^2} K(x,y)\overline{\phi_j \otimes \phi_k(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

とすると，L^2 収束の意味で $K = \lim_{N\to\infty}\sum_{j,k=1}^{N} c_{j,k}\phi_j \otimes \phi_k$ と展開できる．

Proof. まず $\{\phi_j \otimes \phi_k\}_{j\in\mathbb{N}}$ が正規直交系であることを確かめましょう．任意の $j,k,l,m \in \mathbb{N}$ に対して，正値関数に対する Fubini の定理と Schwarz の不等式を順に使って

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]^2} |\phi_j \otimes \phi_k(x,y)\phi_l \otimes \phi_m(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{[0,1]} |\phi_j(x)\phi_l(x)|\mathrm{d}x \int_{[0,1]} |\phi_k(y)\phi_m(y)|\mathrm{d}y \\ &\le \|\phi_j\|_{L^2}\|\phi_k\|_{L^2}\|\phi_l\|_{L^2}\|\phi_m\|_{L^2}\end{aligned}$$

を得ます．この右辺は有限なので，$(\phi_j \otimes \phi_k)(\phi_l \otimes \phi_m)$ は可積分です．したがって可積分関数に対する Fubini の定理が使えて，

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]^2} \phi_j \otimes \phi_k(x,y)\overline{\phi_l \otimes \phi_m(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{[0,1]} \phi_j(x)\overline{\phi_l(x)}\mathrm{d}x \int_{[0,1]} \phi_k(y)\overline{\phi}_m(y)\mathrm{d}y \\ &= \langle\phi_j,\phi_l\rangle\langle\phi_k,\phi_m\rangle \\ &= \delta_{j,l}\delta_{k,m}\end{aligned}$$

となります．これで $\{\phi_j \otimes \phi_k\}_{j\in\mathbb{N}}$ が正規直交系であることが示されました．

次に展開の成立を示します．Bessel の不等式の証明でも使った等式

$$\left\| K - \sum_{j,k=1}^{N} c_{j,k}\phi_j \otimes \phi_k \right\| = \|K\|_{L^2} - \sum_{j,k=1}^{N} |c_{j,k}|^2$$

を思い出すと，Perseval の等式にあたる $\|K\|_{L^2} = \sum_{j,k=1}^{\infty} |c_{j,k}|^2$ を示せば十分です．そこで

$$c_j(y) = \int_{[0,1]} K(x,y)\overline{\phi_j(x)}\mathrm{d}x$$

とおくと，可積分性を上と同様に確認して Fubini の定理を使うことで

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{\infty} |c_{j,k}|^2 &= \sum_{j,k=1}^{\infty} \int_{[0,1]^2} K(x,y)\overline{\phi_j(x)\phi_k(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{[0,1]^2} \overline{K(z,w)}\phi_j(z)\phi_k(w)\mathrm{d}z\mathrm{d}w \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \int_{[0,1]} c_j(y)\overline{\phi_k(y)}\mathrm{d}y \int_{[0,1]} \overline{c_j(w)}\phi_k(w)\mathrm{d}w \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle c_j,\phi_k\rangle|^2\end{aligned}$$

となります．ここで $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が完全正規直交系であることを使うと，Perseval の等式から最後の式はさらに以下のように変形できます：

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{[0,1]}|c_j(y)|^2\mathrm{d}y &= \int_{[0,1]}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{[0,1]}K(x,y)\overline{\phi_j(x)}\mathrm{d}x\int_{[0,1]}\overline{K(x,y)}\phi_j(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_{[0,1]}\int_{[0,1]}|K(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

これで $\sum_{j,k=1}^{\infty}|c_{j,k}|^2=\int_{[0,1]^2}|K(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ が示されました． □

この補題の証明には，長方形の定義関数 $1_{[a,b]\times[c,d]}$ から生成される線型空間が $L^2([0,1]^2)$ で稠密であることを使う方法もあります．その場合は $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ が完全正規直交系であることを使って

$$1_{[a,b]}=\sum_{j=1}^{\infty}\langle 1_{[a,b]},\phi_j\rangle\phi_j,\quad 1_{[c,d]}=\sum_{k=1}^{\infty}\langle 1_{[a,b]},\phi_k\rangle\phi_k$$

と展開しておいて，

$$\begin{aligned}1_{[a,b]\times[c,d]}(x,y) &= 1_{[a,b]}(x)1_{[c,d]}(y)\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\langle 1_{[a,b]},\phi_j\rangle\phi_j(x)\sum_{k=1}^{\infty}\langle 1_{[a,b]},\phi_k\rangle\phi_k(y)\\ &= \sum_{j,k=1}^{\infty}\langle 1_{[a,b]},\phi_j\rangle\langle 1_{[a,b]},\phi_k\rangle\phi_j\otimes\phi_k(x,y)\end{aligned}$$

を正当化し，$1_{[a,b]\times[c,d]}$ は $\{\phi_j\otimes\phi_k\}_{j\in\mathbb{N}}$ の線型結合で近似可能，したがって任意の $L^2([0,1]^2)$ の関数も近似可能，という方針で進めます．

第 6 章

Hilbert–Schmidt の展開定理

線型代数の理論のハイライトは対角化です．この章では無限次元でも，線型作用素がコンパクトかつ自己共役という追加の性質を持つときには類似の結果があることを示します．

6.1 対角化の無限次元版に向けて

自己共役作用素は線型代数における Hermite 行列の類似で，それはユニタリ行列で対角化できるのでした．ユニタリ行列を正規直交基底を並べて $U = (u_1, \dots, u_N)$ と書くことにすると，Hermite 行列 A の対角化は

$$Ax = U[\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)]U^* x = \sum_{n=1}^{N} \lambda_j \langle x, u_j \rangle u_j$$

と表現できることを思い出しましょう．これは A の作用を，固有ベクトルの方向に分解している（すると簡単になる）と読めます．関数解析では関数空間を相手にすることが多く，また無限次元なら上の和は普通は無限和になるので，固有関数展開と呼びます．

さて，Hermite 行列はすべての $x, y \in \mathbb{C}^N$ に対して $\langle Hx, y \rangle = \langle x, Hy \rangle$ となる行列として特徴付けられるのでした．Hilbert 空間上の自己共役作用素は，これと同じ性質を満たすものとして定義されます[*1]．

定義 6.1.1. $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を Hilbert 空間とし，K を H からそれ自身への有界線型作用素とする．すべての $x, y \in H$ に対して $\langle Kx, y \rangle = \langle x, Ky \rangle$ が成り立つとき，K は自己共役であるという．

例として関数 $K(x, y) \in L^2([0, 1]^2)$ が定める積分作用素 K_{F} を考えると，自己共役性は $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ と同値です㊟．次の基本的な性質は線型代数で学んだのとまったく同様に証明できます．

確認問題 6.1.2. K が Hilbert 空間 H 上の有界な自己共役作用素であるとき，その固有値はすべて実数であることと，異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交することを示せ．

[*1] 正確にはここで定義するのは「有界な自己共役作用素」です．量子力学などの応用で出てくる作用素の多くは非有界な自己共役作用素で，そのときは微分作用素のように定義域も込みで考える必要があって，かなり複雑になります．

6.2　Hilbert–Schmidt の展開定理

次の Hilbert–Schmidt による展開定理がこの章の主結果です.

定理 6.2.1. $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を Hilbert 空間とし，K を H からそれ自身へのコンパクト自己共役作用素で $\mathrm{Ker}(K) = \{0\}$ かつ $\dim \mathrm{Ran}(K) = \infty$ を満たすとする．このとき以下が成り立つ：

(a) K の任意の固有値に対応する固有空間は有限次元である.
(b) K の固有値は高々可算であり，固有空間の次元だけ重複して並べたものを $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ とすると $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ である.
(c) $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ に対応する固有ベクトルを正規直交化したものを $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ とすると，任意の $x \in H$ に対して次の展開が成り立つ：

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, u_n\rangle u_n.$$

(d) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は H の完全正規直交系である.

仮定「$\mathrm{Ker}(K) = \{0\}$ かつ $\dim \mathrm{Ran}(K) = \infty$」については，満たされない場合にも結果はあるのですが，場合分けが必要になったり，証明が技術的に少し複雑になるので，もっとも単純で典型的な場合に限りました.

この定理の一つの適用例として，微分作用素の固有値問題 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f = \lambda f$ を $[0,1]$ の両端で 0 という境界条件で考えてみます．これを第 3 章のように積分方程式に変換すると $g(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y) g(y) \mathrm{d}y$ となり，コンパクト作用素 K_{F} の固有値問題になります．この作用素は $K(x,y)$ を具体的に求めることで自己共役であることが確かめられます．また微分方程式から想像される通り固有値と固有関数は $\{(-\frac{1}{(\pi n)^2}, \sin \pi n x)\}_{n>0}$ であり[*2]，とくに $\mathrm{Ker}(K_{\mathrm{F}}) = \{0\}$ です．したがって展開定理の (d) から，この固有関数系は $L^2[0,1]$ の完全正規直交系であることがわかります．Legendre, Hermite, Laguerre などの完全正規直交系が微分方程式に関係していたことも，この展開定理で統一的に理解されます.

6.3　固有値が存在すること

有限次元の線型代数における Hermite 行列の対角化の証明では，最初に固有値が一つ存在することを代数学の基本定理を使って証明していて，それが唯一の「飛び道具」を使うところです（あとは単純な帰納法）．しかし無限次元では同じ議論はできず，次の補題が代わりになります．問題点を感じるために次のような問題に取り組むのも良いでしょう.

確認問題 6.3.1. $L^2[0,1]$ からそれ自身への作用素を $Tf(x) = xf(x)$ で定めると，この作用素は自己共役だが固有値を持たないことを示せ.

[*2] ただしここでは $L^2[0,1]$ 上で考えているので，皆さんがよく知っている一意性定理を使うことはできず，ちゃんと証明するのは意外に面倒です.

演習問題 6.3.2. $K \equiv 1$ に対応する Volterra 型積分作用素を $C[0,1]$ からそれ自身への作用素と見たとき，コンパクトだが固有値を一つも持たないことを示せ．（ヒント：コンパクト性は $f \mapsto \int_0^x f(\lfloor ny \rfloor/n)\,\mathrm{d}y$ を考えよ．）

次の補題は代数学の基本定理の代わりになる「飛び道具」で，そのことから想像されるように証明はそれなりに大変です（第 10 章で別の証明を紹介します）．

補題 6.3.3. K を Hilbert 空間 $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上のコンパクト自己共役作用素とすると $\pm\|K\|_{\mathrm{op}}$ のいずれかは K の固有値である．

Proof. まず作用素 K^2 に対して

$$\|K\|_{\mathrm{op}}^2 = \sup\{|\langle K^2x, x\rangle| \colon x \in H, \|x\| = 1\}$$

が成り立ちます．実際，自己共役性を使って $\langle K^2x, x\rangle = \|Kx\|^2$ と書き換えれば，右辺は $\|K\|_{\mathrm{op}}^2$ の定義です．そこで $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\|x_n\| = 1$ かつ $\langle K^2x_n, x_n\rangle$ が $\|K\|_{\mathrm{op}}^2$ に収束するように取っておきます．この点列の部分列極限として固有ベクトルを作りますが，それは二段階にわかれます．

まず $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の取り方と，K の自己共役性を使うと

$$\begin{aligned}\|\|K\|_{\mathrm{op}}^2 x_n - K^2x_n\|^2 &= \|K\|_{\mathrm{op}}^4\|x_n\|^2 - 2\|K\|_{\mathrm{op}}^2\langle K^2x_n, x_n\rangle + \|K^2x_n\|^2\\ &\le 2\|K\|_{\mathrm{op}}^4\|x_n\|^2 - 2\|K\|_{\mathrm{op}}^2\langle K^2x_n, x_n\rangle\\ &\xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

ですが，これは x_n が「近似的に固有方程式を満たす」ことを意味します．ここでもし K^2x_n が（必要なら部分列をとって）収束することが証明できたら，それとの差が 0 に収束する $\|K\|_{\mathrm{op}}^2 x_n$ も同じ部分列に沿って収束します．そこで $\lim_{n\to\infty} x_n = y \in H$ を上の式に代入して K の連続性を使えば，$\|K\|_{\mathrm{op}}^2 y - K^2y = 0$ となります．これを

$$(\|K\|_{\mathrm{op}} + K)(\|K\|_{\mathrm{op}} - K)y = 0$$

と書き直すと，y が固有値 $\|K\|_{\mathrm{op}}$ の固有ベクトルであるか，そうでなければ $(\|K\|_{\mathrm{op}} - K)y$ が固有値 $-\|K\|_{\mathrm{op}}$ の固有ベクトルであることになるので，証明が終わります． □

上で仮定した「$(K^2x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束部分列を持つ」ことは，コンパクト作用素の現代的な定義にあたる以下の性質からわかります㊟．

補題 6.3.4. $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を Hilbert 空間とし，$K \in \mathcal{L}_{\mathrm{c}}(H)$ とする．このとき H の任意の有界列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$(Ku_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束部分列を含む．

Proof. 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して $K_m \in \mathcal{L}_{\mathrm{f}}$ を $\|K - K_m\|_{\mathrm{op}} < \frac{1}{m}$ とをみたすようにとります．このとき $(K_mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有限次元ノルム空間の有界列だから収束部分列 $(K_mu_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ を持ち，以下帰納的に $(u_n^{(m+1)})_{n\in\mathbb{N}} \subset (u_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ を $(K_{m+1}u_n^{(m+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するようにとることができます．こうして作った $(u_n^{(m)})_{m,n\in\mathbb{N}}$ の対角線部分を使うと

$$\|Ku_m^{(m)} - Ku_n^{(n)}\| \le \|K_l(u_m^{(m)} - u_n^{(n)})\| + \|K - K_l\|_{\mathrm{op}}\|u_m^{(m)} - u_n^{(n)}\|$$

ですが，l を大きく取ってから $m, n \to \infty$ とすることで $(Ku_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列とわかり，H の完備性から収束します． □

この補題の証明は Hilbert 空間に制限せずとも，Banach 空間の枠組みで通用します．

6.4 Hilbert–Schmidt の展開定理の証明

固有値を一つ見つける方法が確立できたら有限次元のときと同様に帰納的に議論を進めることができて，展開定理の証明ができます．

(a) 任意の $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して前の章で $\dim \mathrm{Ker}(\mu I - K) < \infty$ を示してあるので，固有値 μ に対応する固有空間の次元も有限です．

(b) 補題 6.3.3 で存在が保証された固有値を μ_1 とすると，(a) により対応する固有空間 $\mathrm{Ker}(\mu_1 I - K)$ の次元 m_1 は有限です．その正規直交基底を $\{u_j\}_{j=1}^{m_1}$ とし，$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{m_1} = \mu_1$ とします．次に K を $H_1 = \mathrm{Ker}(\mu_1 I - K)^\perp$ に制限したものを K_1 とします．このとき H_1 は H の閉部分空間なので，H と同じ内積で Hilbert 空間になり，さらに任意の $u \in H_1$ と $v \in \mathrm{Ker}(\mu_1 I - K)$ に対して，

$$\langle Ku, v\rangle = \langle u, Kv\rangle = \overline{\mu_1}\langle u, v\rangle = 0$$

なので $K(H_1) \subset H_1$，つまり K_1 は H_1 からそれ自身への写像です．有界かつ有限階の作用素は制限しても同じ性質を持つことにも注意すると $K_1 \in \mathcal{L}_{\mathrm{c}}(H_1)$ がわかる㊟ので，K_1 に再び補題 6.3.3 を適用して同じ議論を繰り返すことができます．こうして固有値 $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ と対応する固有ベクトルのなす正規直交系 $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ が得られますが，$\|K\|_{\mathrm{op}} \geq \|K_1\|_{\mathrm{op}}$ なので $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots$ となります．ここで $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ 自身は正規直交系なので収束しませんが，一方で $Ku_n = \lambda_n u_n$ は補題 6.3.4 から収束部分列を持つので，$(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ の対応する部分列は 0 に収束するしかありません．$(|\lambda_j|)_{j=1}^{n}$ は減少列だったのでこれから $\lim_{n\to\infty} \lambda_j = 0$ がわかります．

(c) 上の (b) の証明で構成した $(\mu_j)_{j=1}^{\infty}$, $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ と $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ を使って，任意の $x \in H$ に対して $(\mu_j)_{j=1}^{n}$ に対応する固有ベクトルが生成する空間 $\mathrm{span}\{u_j\}_{j=1}^{m_n}$ への直交射影 $x_n = \sum_{j=1}^{m_n}\langle x, u_j\rangle u_j$ を考えます．このとき $x - x_n$ は $(\mathrm{span}\{u_j\}_{j=1}^{m_n})^\perp =: H_n$ に属するので，$(\mu_j)_{j=1}^{\infty}$ の作り方から

$$\begin{aligned}\|Kx - Kx_n\| &\leq \|K|_{H_n}\|_{\mathrm{op}}\|x - x_n\| \\ &\leq |\mu_{n+1}|\|x\| \\ &\xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

一方で (b) と Bessel の不等式から

$$Kx_n = \sum_{j=1}^{m_n} \lambda_j\langle x, u_j\rangle u_j \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\langle x, u_j\rangle u_j$$

となるので，展開 $Kx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\langle x, u_j\rangle u_j$ の成立が示せました．

(d) $x \in H$ が正規直交系 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ のすべてと直交するなら，(c) の結果から $Kx = 0$ となります．ここで $\mathrm{Ker}(K) = \{0\}$ と仮定したことを思い出すと $x = 0$ となるので，$\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ は完全です． □

証明の最後を見ればわかるように $\mathrm{Ker}(K) \neq \{0\}$ のときはその完全正規直交系を $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ に追加すれば H の完全正規直交系が得られます．

演習問題 6.4.1. 区間 $[0,1]$ において境界値問題 $f'' = -f$, $f(0) = f(1) = 0$ を考えることにより，$\{\sin(2\pi nx)\}_{n\geq 0}$ が $L^2[0,1]$ の完全正規直交系であることを示せ．

6.5 補遺：一般の作用素の場合へ向けた注意

コンパクト自己共役作用素は固有値と固有関数だけで展開ができることがわかったわけですが，線型作用素の一般論から見るとこれは極めて特殊な状況です．一般の線型作用素に対しては，固有値を一般化したスペクトルという概念を考えるほうが自然で，そのときには固有関数展開は「スペクトル測度に関する積分」という形式になります．ただしそれはどんな作用素に対しても成り立つことではなく，例えば自己共役性のような条件が必要になります（一方で有界であることは必要ありません）．

一つだけ様子を見るための例を挙げておきます．用語の準備が足りないので，いい加減な説明になっていることには注意してください．微分作用素 $-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ は $e_\xi(x) = e^{i\xi x}$ を固有値 ξ に対応する固有関数に持ち，「関数解析入門」で学んだように急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に限れば

$$-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\xi\mathcal{F}f(\xi))(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi\langle f, e_\xi\rangle e_\xi(x)\mathrm{d}\xi$$

が成り立つのでした．この式は，Hilbert–Schmidt の定理と見比べると和が積分に置き換わっただけになっています．ただし固有関数 e_ξ は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属さないので，これを固有関数と考えてよいのかは疑問ですし，また適用範囲が $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に限られているのもやや不満です．実は $-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ は，第 2 章で紹介した $H_0^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ で定義された自己共役作用素になります（$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上でなら $\langle -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f, g\rangle = \langle f, -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g\rangle$ は部分積分で確かめられます）．そのことを使って $f \in H_0^1(\mathbb{R})$ まで上の “固有関数展開” が拡張できます．この話題については，第 15 章でもう少し詳しく扱います．

一般の自己共役作用素に対する結果の正確な内容と証明は，参考書に挙げた黒田成俊「関数解析」に書かれています．応用も含めてとなると，E.B. Davies, ”Spectral Theory and Differential Operators”（日本語訳もあります）が面白いと思います．

第 7 章

Banach 空間の共役空間の例

ノルム空間 X に対して，その共役空間 X' は X 上の有界線型汎関数の全体として定義され，作用素ノルムについて Banach 空間になるのでした．最初の 2 章では Hilbert 空間の共役空間は元の空間と同一視できるという Riesz の表現定理を紹介し，それが二階の楕円型方程式の境界値問題に応用できることを示しました．

このように X の共役空間 X' が具体的にわかっていることは，役に立ちます．他にも共役空間を導入したときに述べた同定問題も，後の第 9 章で扱う弱収束も，「すべての $\phi \in X'$ に対して・・・ならば」という形式で，実際に条件を確認するには X' がわかっている必要があります．この章では Hilbert 空間ではない Banach 空間のいくつかの典型例に対して，その共役空間の特徴づけを紹介し，そのあと共役空間に関する一般的な注意を述べます．

7.1 L^p の共役空間

よく知っている Banach 空間 $L^p(\mu)$ から始めましょう．μ は σ-有限な測度と仮定します．$L^p(\mu)'$ に含まれる汎関数は簡単に見つかります．実際 $p' = \frac{p}{p-1}$ とすると，任意の $g \in L^{p'}(\mu)$ に対して

$$L^p(\mu) \ni f \mapsto \int fg \, \mathrm{d}\mu$$

という汎関数は Hölder の不等式により有界線型汎関数です．とくに g として測度が有限な任意の集合の定義関数をとることができるので，

$$\text{任意の } \phi \in L^p(\mu)' \text{ に対して } \phi(f) = 0 \text{ ならば } f = 0$$

という「同定問題」は解決しています．

演習問題 7.1.1. この節のここまでに書いた主張全てに証明をつけよ．また上のような積分が有界線型汎関数を定めるのは，$g \in L^{p'}(\mu)$ の場合に限ることを示せ．

実は $L^p(\mu)'$ $(p \in [1, \infty))$ には Riesz の表現定理の類似が成立します：

定理 7.1.2. $p \in [1, \infty)$ かつ μ は σ-有限な測度とする．このとき任意の $\phi \in L^p(\mu)'$ に対してただ一つ

$h_\phi \in L^{p'}(\mu)$ が存在して，$\phi(f) = \int f h_\phi \,\mathrm{d}\mu$ と表せる．
さらに $\|\phi\|_{\mathrm{op}} = \|h_\phi\|_{L^{p'}}$ である．

この定理は [黒田] には見当たらないので，少し丁寧に述べます（[増田，問 5.1] に少し異なる証明があります）．

時間に余裕があれば，特別な場合である $\ell^p(\mathbb{N})$ の場合を自分で考えてみるのも良いでしょう（[黒田，例題 8.6]，[増田，例 5.2]）．この場合は $\phi \in \ell^p(\mathbb{N})'$ に対して，$h_\phi(k) = \phi(\mathbf{e}_k)$ を考えることで，直接数列 h_ϕ を構成することができます．この数列が $\ell^{p'}(\mathbb{N})$ に属することを示せば，定理の前半が示せます．後半は $a \in \ell^p(\mathbb{N})$ を上手くとって $|\phi(a)|$ が $\|a\|_{\ell^p}\|h_\phi\|_{\ell^{p'}}$ にいくらでも近くできることを示します．

Proof. 測度空間が一般の場合には，数列空間のときのように直接内積のような表現を与える関数を作ることはできません[*1]．これは「関数解析入門」で L^p の完備性を示したときにもあった問題で，何かしらの工夫が必要になります．ここでは Radon–Nikodym の定理を使って

$$L^p(\mu)' \longrightarrow \mu \text{ に絶対連続な測度 } \nu \longrightarrow \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$$

という手順で行います．μ が有限測度の場合から σ-有限の場合への移行は簡単なので，有限測度の場合だけ考えます．$\phi \in L^p(\mu)'$ と可測集合 A に対して，

$$\nu_\phi(A) = \phi(1_A)$$

によって，集合関数 ν_ϕ を定めます．これが複素測度になっていることをまず示しましょう．これは簡単で，測度であるための十分条件の一つが

1. $\nu_\phi(\emptyset) = \phi(0) = 0$,
2. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ なら $1_{A_1 \cup A_2} = 1_{A_1} + 1_{A_2}$ なので，ϕ の線型性から
$$\nu_\phi(A_1 \cup A_2) = \phi(1_{A_1}) + \phi(1_{A_2}) = \nu_\phi(A_1) + \nu_\phi(A_2),$$
3. $A_n \uparrow A$ なら $1_{A_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1_A$ in $L^p(\mu)$ なので，ϕ の連続性から
$$\lim_{n\to\infty} \nu_\phi(A_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(1_{A_n}) = \phi(1_A) = \nu_\phi(A)$$

のように確認できます．さらにこの ν_ϕ は明らかに μ に対して絶対連続なので Radon–Nikodym の定理から，ある $h_\phi \in L^1(\mu)$ によって以下のように表せます：

$$\nu_\phi(A) = \int_A h_\phi \,\mathrm{d}\mu.$$

この式は $\phi(1_A) = \int 1_A h_\phi \,\mathrm{d}\mu$ と書き直せることに注意しましょう．これは $\phi(f)$ が，$f = 1_A$ という特別な形の場合には積分の形で表せることを示しています．この表現は線型性により単関数の全体まで拡張できます．ここで定理が主張する通り $h_\phi \in L^{p'}(\mu)$ なら，さらに単関数近似を使って一般の L^p 関数まで拡張できるのですが，$h_\phi \in L^1(\mu)$ しかわかっていないので，積分の収束 ($\int f_n h_\phi \,\mathrm{d}\mu \to \int f h_\phi \,\mathrm{d}\mu$) が問題

[*1] 例えば $L^p(\mathbb{R})$ の関数の一点での値はそもそも定まっていないのでした．

になります．これを解決するために，まず $f \in L^\infty(\mu)$ までは[*2]，単関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で近似して，ϕ の連続性，$h_\phi \in L^1(\mu)$ と Lebesgue の優収束定理を使うことで

$$\phi(f) = \lim_{n\to\infty} \phi(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int f_n h_\phi \,\mathrm{d}\mu = \int f h_\phi \,\mathrm{d}\mu$$

と積分表現を拡張できることに注意しましょう．

次に $h_\phi \in L^{p'}(\mu)$ を示します．$p > 1$ $(\Rightarrow p' < \infty)$ のときは

$$f = |h_\phi|^{p'-1} e^{-\sqrt{-1}\arg(h_\phi)}$$

に対して $\int f h_\phi \,\mathrm{d}\mu$ を考えたいのですが，この積分が $\phi(f)$ と一致するかどうかはまだわかりません．しかし $f_n = f1_{\{|h_\phi|\le n\}}$ に対しては積分表現を示したので，

$$\phi(f_n) = \int f_n h_\phi \,\mathrm{d}\mu = \int |h_\phi|^{p'} 1_{\{|h_\phi|\le n\}} \,\mathrm{d}\mu$$

です．この両辺を $\|f_n\|_{L^p} = \|h_\phi 1_{\{|h_\phi|\le n\}}\|_{L^{p'}}^{p'/p}$ で割って，作用素ノルムの定義を思い出せば $\|\phi\|_{\mathrm{op}} \ge \|h_\phi 1_{\{|h_\phi|\le n\}}\|_{L^{p'}}$ を得ます．さらに $n \to \infty$ として単調収束定理を使えば $\|\phi\|_{\mathrm{op}} \ge \|h_\phi\|_{L^{p'}}$ となって，$h_\phi \in L^{p'}(\mu)$ が示されました．$p = 1$ $(\Rightarrow p' = \infty)$ のときは，$f_\epsilon = e^{-\sqrt{-1}\arg(h_\phi)} 1_{\{|h_\phi|\ge \|h_\phi\|_\infty - \varepsilon\}}$ として上と同様の議論をすれば $\|h_\phi\|_\infty \le \|\phi\|_{\mathrm{op}}$ がわかります．$h_\phi \in L^{p'}(\mu)$ がわかってしまえば，$f \in L^p(\mu)$ に対して近似する単関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で $|f_n| \le |f|$ となるものがあるので，$\|f h_\phi\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p}\|h_\phi\|_{L^{p'}}$ と Lebesgue の優収束定理を使って，目標の

$$\phi(f) = \lim_{n\to\infty} \phi(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int f_n h_\phi \,\mathrm{d}\mu = \int f h_\phi \,\mathrm{d}\mu$$

が得られます．またこの積分表現から $\|\phi\|_{\mathrm{op}} \le \|h_\phi\|_{L^{p'}}$ もわかるので，証明が終わります． □

結局 $p \in [1,\infty)$ に対しては，$(L^p)'$ は $\phi \mapsto h_\phi$ によって $L^{p'}$ に等長同型であることが示せたので，この対応によって Hilbert 空間のときと同様に $(L^p)' \cong L^{p'}$ と見なすことができます．

ここからいくつか残された場合への注意を述べます．まず条件「μ が σ-有限」については，実は $p \in (1,\infty)$ のときは外すことができます．しかし σ-有限でない測度空間で L^p 空間を考えることはほとんどないので，必要になったら証明を見るという姿勢で良いと思います．

次に残された $p = \infty$ の場合はどうなっているのでしょうか．まず，

確認問題 7.1.3. 前の証明が $p = \infty$ で破綻するのはどこか指摘せよ．

実は有限集合などの自明な場合を除いては，$(L^\infty)'$ の中には L^1 関数との内積の形では表せないものがあります．しかしその証明には次の章で紹介する Hahn–Banach の定理が必要です．$(L^\infty)'$ の特徴づけは「μ に絶対連続な有限加法的複素測度での積分」として与えられることが知られていますが，あまり有用とは思えないのでこの講義ではこれ以上踏み込みません．むしろ $L^\infty \cong (L^1)'$ により，L^1 を「測定器」として代用するという方向のことを後で学びます．

[*2] μ を有限測度に限定しているので $L^\infty(\mu) \subset L^p(\mu)$ です．

7.2　$C_{\mathrm{c}}(S)$ の共役空間

L^p 以外にも共役空間がわかっている例はいくつかあって，局所コンパクト Hausdorff 空間 S 上の台コンパクト連続関数の空間 $C_{\mathrm{c}}(S)$ はとくに重要です．まず L^p 空間との違いを感じるために，$(S, \mathcal{B}(S))$ 上に有限測度 μ があるとしましょう．このとき $C_{\mathrm{c}}(S) \subset L^p(\mu)$ であり，さらに連続関数空間の標準的なノルム $\|\cdot\|_\infty$ は $\|\cdot\|_p$ より強い位相を定めます．このようなとき共役空間に関しては逆の包含関係

$$C_{\mathrm{c}}(S)' \supset L^p(\mu)'$$

が成り立ちます㊟．さらに $p < \infty$ のときは $L^p(\mu)' \simeq L^{p'}(\mu)$ と関数空間と同一視できましたが，任意の $x \in S$ に対して

$$C_{\mathrm{c}}(S) \ni f \mapsto f(x)$$

は有界線型汎関数であることがわかり，これが $\int_S f(s)\delta_x(\mathrm{d}s)$ と測度を使って実現できたことを思い出すと，$C_{\mathrm{c}}(S)'$ には少なくともいくつかの（関数ではない）測度が含まれることもわかります．

実は空間 $C_{\mathrm{c}}(S)$ の共役空間の元はすべて測度として表現できます．それを述べるために一つ用語を準備します．

定義 7.2.1. 位相空間 S 上の Borel 集合族 $\mathcal{B}(S)$ 上の測度は，任意の Borel 集合 A に対して

$$\mu(A) = \begin{cases} \sup\bigl\{\mu(K) \bigm| K \subset A \text{ はコンパクト}\bigr\}, & \text{（内部正則性）} \\ \inf\bigl\{\mu(G) \bigm| G \supset A \text{ は開集合}\bigr\}, & \text{（外部正則性）} \end{cases}$$

を満たすときに正則であるという．

複素測度 ν に対しては，実部と虚部の正の部分と負の部分が全て正則のときに「ν が正則」といいます．

定理 7.2.2 (Riesz–Markov–Kakutani)**.** S を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．このとき任意の $\phi \in (C_{\mathrm{c}}(S), \|\cdot\|_\infty)'$ に対して，$\phi(f) = \int f \,\mathrm{d}\nu_\phi$ を満たす正則な複素測度 ν_ϕ がただ一つ存在する．さらに $\|\phi\|_{\mathrm{op}} = \|\nu_\phi\|_{\mathrm{TV}}$ である[*3]．

なお $C_{\mathrm{c}}(S)$ は完備ではありませんが，$\|\cdot\|_\infty$ で完備化した $C_0(S)$ の共役空間についても同じ特徴づけが成り立ちます．

演習問題 7.2.3. $C_0(S)$ は，然るべき意味で「遠方で 0 に収束する連続関数の集合」と見なせることを証明せよ[*4]．

Riesz–Markov–Kakutani の定理の証明はとても大変なので，この講義では説明しません．ν_ϕ の作り方は $(L^p)' = L^{p'}$ のときとほとんど同じなのですが，今度は $1_A \notin C_{\mathrm{c}}(S)$ なので直接 $\phi(1_A)$ が考えられないことが問題です．これを解決するために位相空間論の事実「コンパクト Hausdorff $\Rightarrow$ 正規」と Urysohn

[*3] $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$ は全変動ノルムです．Lebesgue 積分の教科書を参照．
[*4] S は距離空間とは限らないので「遠方」の意味を与えることも問題の一部．

の補題を使って近似の議論を行います．詳細に興味があれば，例えば “245B, Notes 12: Continuous functions on locally compact Hausdorff spaces” を Google 検索して見つかる Terence Tao の講義ノート[*5]の Theorem 8 周辺を参照してください．

なぜこの定理の証明が大変なのかは，[Lax, Appendix A] にある別証明の方針を見ると少し理解できます．そこでは測度の存在を仮定せず，$C_{\mathrm{c}}(S)$ 上の正値線型汎関数[*6]から出発して，可測構造を含めた測度の構成が行われます．つまりこの定理の証明は，測度の構成と同じ程度の大変さがあるということです．

[*5] https://terrytao.wordpress.com/2009/03/02/245b-notes-12-continuous-functions-on-locally-compact-hausdorff-spaces/

[*6] 非負関数に対しては（∞ を許した）非負の値を返す線型汎関数．

第 8 章

Hahn-Banach の定理

ノルム空間 X に対して，その共役空間 X' は X 上の有界線型汎関数の全体として定義され，$x \in X$ の情報を部分的に「観測」するものという側面があるのでした．また X' は，それ自身作用素ノルムについて Banach 空間になるのでした．そして前の章までに Hilbert 空間や L^p 空間，$C_{\mathrm{c}}(S)$ などについては共役空間の特徴づけを紹介しました．とくにこれらの空間においては

$$x \in X \text{ について，任意の } \phi \in X' \text{ に対して } \phi(x) = 0 \text{ ならば } x = 0$$

と X' の「観測」によって X の元を区別（同定）できるのでした．

同じことが一般のノルム空間に対して成り立つか，というのがこの章で扱う問題です．ただしその解決法はある意味でかなり強引（超越的）で，それでわかったという気にはならない可能性が高いことを予告しておきます．どういう意味かは追々述べていきます．

8.1 何が問題なのか

Hilbert 空間の場合には，内積 $y \mapsto \langle y, x\rangle$ によって同定問題が解決したことを思い出しましょう．同じことを一般のノルム空間でできないのでしょうか．具体的には $x \in X$ に対してそれを含む基底 E をとれば，全ての $z \in X$ は

$$z = c_z x + \sum_{\mathbf{e} \in E \setminus \{x\}} c_{\mathbf{e},z}\mathbf{e}$$

と表せるので[*1]，線型汎関数を $\phi_x(z) = c_z$ と定めることができます．これは内積と同様に $\phi_x(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ を満たすので，この ϕ_x が有界なら同定問題は解決するのですが... 残念ながらこの ϕ_x は以前にも触れた代数基底による展開係数という線型汎関数であり，有限個を除いて有界ではありません．ちなみにこれは Hilbert 空間でも同じことで，このことから ϕ_x が（有界でない場合には）上の内積とは違う汎関数であるというやや奇妙な結論が導かれます[*2]．

最後の「ϕ_x が内積とは限らない」という結論は，奇妙に見えますが実は良いニュースとも言えます．実際，Hilbert 空間の内積 $y \mapsto \langle y, x\rangle$ は，

[*1] 非可算和に見えますが，基底の定義から $c_{\mathbf{e},z}$ は有限個を除いて 0 です．

[*2] もう少し考えると，無限次元 Hilbert 空間は正規直交基底を持たないことが示せます．

- 一次元部分空間 $\{\lambda x\colon \lambda \in \mathbb{C}\}$ では ϕ_x に一致し，
- 空間全体で有界である

という性質を持つ線型汎関数になっています．一般のノルム空間でも，この二つの性質を満たす線型汎関数が見つけられれば，共役空間を使った同定問題は解決します．

この章で扱う Hahn–Banach の定理は，部分空間（例えば $L_x = \{\lambda x\colon \lambda \in \mathbb{C}\}$）でのみ定義された有界な線型汎関数（例えば $\phi_x|_{L_x}\colon \lambda x \mapsto \lambda$）を，有界性を保ったまま空間全体に拡張するものです．$\phi_x|_{L_x}$ の場合は ϕ_x という自然な拡張があって，それは（ほとんどの場合）非有界なのに有界な拡張があるというのは不思議な感じもしますが，Hilbert 空間の内積はそれを具体的に与えていたわけですから，無理なことではありません．

8.2　Hahn–Banach の定理

Hahn–Banach の定理を述べるために一つ用語の準備をします．

定義 8.2.1. 線型空間 X 上の非負値関数 p は次を満たすとき半ノルムという：

1. 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ と $x \in X$ に対して，$p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$,
2. 任意の $x, y \in X$ に対して，$p(x+y) \le p(x) + p(y)$.

定理 8.2.2 (Hahn–Banach の定理)**.** 線型空間 X の部分空間 X_0 で定義された線型汎関数 g_0 に対して，X 上の半ノルム p があって，任意の $x \in X_0$ に対して $|g_0(x)| \le p(x)$ を満たすとする．このとき g_0 はこの関係を保ったまま X 全体に拡張できる．

とくに X がノルム空間で g_0 が X_0 上で有界ならば，p としてノルムの定数倍をとることで X' への拡張ができることになります．この状況に限らない理由は，[増田] や [Teschl] に記載の分離定理などを見るとわかるのですが，この章の内容に関する限りは p はノルムだと思っていても構いません．

Hahn–Banach の定理の証明．これは意外に簡単です．どの参考書にも同じ証明が書かれているので，それを補足する形で概要を説明します（係数体が $\mathbb{R}$ の場合です．$\mathbb{C}$ にするのは簡単なのでここでは触れません）．まず X_0 に入っていない点 $x_1 \in X$ をとって，一次元だけ広い部分空間 $\{x + \lambda x_1\colon x \in X_0, \lambda \in \mathbb{R}\}$ への g_0 の拡張 g_1 を考えます．$g_1(x+\lambda x_1) = g_1(x) + \lambda g_1(x_1)$ を要求していますので，$g_1(x_1)$ の値だけ決めれば十分です．$g_1(x_1)$ の値を，$g_1(x+\lambda x_1) \le p(x+\lambda x_1)$ が全ての $x \in X$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して成り立つように選べることは，[黒田，定理 8.11] または [増田，定理 5.2] の証明の第一段にあたります．その議論は巧妙に見えるかもしれませんが，p の凸性だけが本質的で，X_0 が一次元の場合にたくさん絵を描いてみれば大して難しいことではないとわかると思います．もう一方の $g_1(x+\lambda x_1) \ge -p(x+\lambda x_1)$ は $g_1(x+\lambda x_1) = -g_1(-x-\lambda x_1)$ と上で示したことからすぐにわかります．

これで，g_0 の一次元広い部分空間への拡張 g_1 を，$|g_1| \le p$ となるように作れることが示せました．$g_k \to g_{k+1}$ も同じようにできるのであとは帰納法，と言いたいところですが，もちろん X が無限次元の場合にだけ興味があるので，普通の帰納法ではできません．そこで代わりに Zermelo の整列可能定理で

$X \setminus X_0$ を並べて，超限帰納法を使います．正確に述べると $X \setminus X_0$ に入れた整列順序を $\prec, \preceq$ として，

$$X_v = \mathrm{span}(\{w\colon w \preceq u\} \cup X_0)$$

と定め，以下の命題を考えます：

(P_v) すべての $u \preceq v$ に対して，g_0 の X_u への拡張 g_u であって，全ての $x \in X_u$ に対して $|g_u(x)| \leq p(x)$ を満たし，$u_1 \preceq u_2$ ならば g_{u_2} は g_{u_1} の拡張になっているものが存在する．

まず $X \setminus X_0$ の最小元を v_1 とすると，前の g_1 を作った議論で (P_{v_1}) が成り立つことがわかっています．次に任意に $v \in X \setminus X_0$ をとって，すべての $u \prec v$ に対して (P_u) が成り立つと仮定します．このとき $x \in \mathrm{span}(\{u\colon u \prec v\} \cup X_0)$ は有限個の $u_1 \prec u_2 \prec \cdots \prec u_k \prec v$ と $x_0 \in X_0$ を使って

$$x = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_ku_k + x_0 \in \mathrm{span}(\{u\colon u \preceq u_k\} \cup X_0)$$

と表せることに注意すると，

$$g_{\prec v}(x) = g_{u_k}(x)$$

によって $\mathrm{span}(\{u\colon u \prec v\} \cup X_0)$ 上で $|g_{\prec v}(x)| \leq p(x)$ を満たす線型汎関数 $g_{\prec v}$ が定まります㊓．

すると前の g_1 を作った議論で $g_{\prec v}$ を拡張することで g_v が作れるので，(P_v) がわかって，超限帰納法により全ての $v \in X \setminus X_0$ に対して (P_v) が成立することが従います．このことから X 上の線型汎関数 g で $|g(x)| \leq p(x)$ を満たすものがつくれることは，上の $g_{\prec v}$ を作った議論と同じです． □

ここは Zorn の補題を使うことが多く [黒田], [増田] でもそうしていますが，それは多くの大学で集合と論理の講義で整列可能定理や超限帰納法まで扱う時間がないことに配慮しているのだと思います．Zorn の補題と整列可能定理はどちらも選択公理に同値なので，論理的にはどちらでも同じことです．しかし逆にこれらを知ってさえいれば，上で「あとは（超限）帰納法」という感覚を持てるわけで，私はその方が証明の構造がわかり易いと思います[*3]．この機会に主張だけでも見ておくと考え方の幅が広がって良いと思います．

Hahn–Banach の定理の証明は簡単だと述べましたが，結局は選択公理に帰着したわけで，難しいと感じた人もいるかもしれません．少なくとも超越的な証明なのは確かで，これでわかったという気にはならないのも事実です．このあたりは選択公理との付き合い方の問題で，人にもよるのですが，「選択公理を理解しようとしなければ簡単」という意味で言いました[*4]．公理は基本的には受け入れる（か否かだけを自分で決める）ものですから，ZFC 公理系では簡単と言っているわけです．選択公理やその帰結である Hahn–Banach の定理を受け入れるかどうかは，一応議論の余地がありますが，とりあえずこの定理を使って共役空間の一般論が展開できることを見ましょう．

[*3] ただし超限帰納法は無限集合を対象にするので，この証明でもわかるように「すべての $u \prec v$ に対して (P_u) が成り立つ」という仮定から $g_{\prec v}$ を構成する手続きが自明でなくなることには，少し注意が必要です．

[*4] 選択公理に限らず，公理を理解しようとすることはあまり生産的に思えません．その公理から何が導けるかで有用性が判断できれば十分でしょう．

8.3　共役空間の一般論

まず最初に示したいのは，内積に替わる線型汎関数の存在です：

定理 8.3.1. X をノルム空間とすると，各 $x \in X$ に対し有界線型汎関数 $\phi_x \in X'$ で，$\phi_x(x) = \|x\|_X$ かつ $\|\phi_x\|_{\mathrm{op}} = 1$ となるものが存在する．従ってとくに

$$\|x\|_X = \max_{\|\phi\|_{\mathrm{op}}=1} \phi(x).$$

これは $X_0 = \{\lambda x \colon \lambda \in \mathbb{C}\}$ 上の $g_0 \colon \lambda x \mapsto \lambda \|x\|_X$ と，$p(\cdot) = \|\cdot\|_X$ に Hahn–Banach の定理を使えばわかります．$\|\phi_x\|_{\mathrm{op}} = 1$ の部分は，$\frac{|\phi_x(x)|}{\|x\|_X} = 1$ であることと，$\frac{|\phi_x(y)|}{\|y\|_X} \leq \frac{p(y)}{\|y\|_X} = 1$ からわかります．とくに

$$\text{任意の } \phi \in X' \text{ に対して } \phi(x) = 0 \text{ ならば } x = 0$$

も従います．

確認問題 8.3.2. 定理の最後の「従ってとくに」の部分を証明せよ．

前の定理は次のように部分空間への距離に拡張できます：

定理 8.3.3. ノルム空間 X の部分空間 X_0 と $y \in X$ が $\operatorname{dist}(y, X_0) = d > 0$ を満たすとする．このとき $\phi \in X'$ で次を満たすものが存在する：

$$\phi|_{X_0} = 0, \quad \phi(y) = d, \quad \|\phi\|_{\mathrm{op}} = 1.$$

これは [増田] などに記載のある Hahn–Banach の幾何形（分離定理）の簡単な場合でもあります．

演習問題 8.3.4. $\{x + \lambda y \colon x \in X_0, \lambda \in \mathbb{C}\}$ 上の線型汎関数 $\phi_0(x + \lambda y) = \lambda d$ を Hahn–Banach の定理で拡張することにより，上の定理を証明せよ．

このように Hahn–Banach の定理を使うと，原点や部分空間からの距離などが有界線型汎関数で測れるようになって，Hilbert 空間のときのように幾何学的な直感が利くようになります．

8.4　L^∞ の共役空間

次に L^∞ の共役空間について，Hahn–Banach の定理を使ってわかることを述べます．これは前の章の内容を補完するもので，その意味では定理のありがたみを示す結果でもありますが，一方で詳しく見るとやや気持ちの悪いことになっているところもあり，選択公理を受け入れるということがどういうことか少し理解が深まると思います．

示したいことは測度空間が本質的に有限集合であるという自明な場合を除いて $(L^\infty)' \ncong L^1$ ということです．これは一般の測度空間で正しいのですが，ここではわかり易い $L^\infty(\mathbb{R})' \ncong L^1(\mathbb{R})$ を示します．

$f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して $g \mapsto \int fg$ と定めると[*5]，これが $L^\infty(\mathbb{R})'$ に属することは明らかなので，示すべきことはこのように表せない有界線型汎関数が存在するということです．どんなものか少し考えてみてください．

ちょっと想像がつかないのではないでしょうか．実際，そういう関数を普通に構成するのは困難です（勘の良い人は選択公理を使うと宣言しているのだから，普通に構成できるはずがないと早々に諦めたかもしれません）．

$L^1(\mathbb{R})$ の関数との内積で表せない線型汎関数を，Hahn–Banach の定理を使って作りましょう．このために $L^\infty(\mathbb{R})$ の部分空間

$$C_0(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ は有界連続で，} \lim_{|x|\to\infty} f(x) \text{ が存在する} \right\}$$

の上で，有界線型汎関数 $\ell\colon f \mapsto \lim_{|x|\to\infty} f(x)$ を考えます．この ℓ はもちろん Hahn–Banach の定理によって $\bar{\ell} \in L^\infty(\mathbb{R})'$ に拡張できます．ところが $\bar{\ell}(f) = \int fg$ となるような $g \in L^1(\mathbb{R})$ は存在しないことがわかります．実際そのような g が存在したとすると，$h \in C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ を $\int hg \neq 0$ となるようにとることで，$f \in C_0(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \int fg \neq \int (f+h)g = \lim_{|x|\to\infty} (f(x) + h(x))$$

となって矛盾が導かれます．

この証明で用いた拡張はちょっと不思議というか，強引な感じがしないでしょうか．遠方での極限が存在しない関数に $\lim_{|x|\to\infty} f(x)$ の類似を定義したことになっています．しかも Hahn–Banach の定理の証明を検討するとわかりますが，この拡張は一意的とは限りません㊟．さらに悪いことに，この拡張が遠方での極限が持っていた自然な性質を保っているとも限りません．例えば $a \in \mathbb{R}$ に対して $\tau_a\colon f \mapsto f(\cdot + a)$ で平行移動を定義すると，$f \in C_0(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ に対しては $\ell(f) = \ell(\tau_a f)$ ですが，一般の $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ に対して同じことが成り立つかは不明です．実は平行移動不変性は，次のように手の込んだことをすれば保てるのですが，ともかく自然には保証されていないということです．

演習問題 8.4.1. 上の ℓ の代わりに Cesàro 平均 $\ell_{\mathrm{C}}\colon f \mapsto \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int f 1_{[0,n]}$ を考えることにより，ℓ の $L^\infty(\mathbb{R})$ への平行移動不変な拡張が存在することを示せ[*6]．

結局のところ，Hahn–Banach の定理には人智を超えた，得体の知れない有界線型汎関数をたくさん与える定理という側面があります．そういうものを受け入れることで，共役空間の一般論がすっきりと展開できるのは事実であり，とくに排除する理由は見当たりません[*7]．しかし難しいはずのことを人智を超えた力で簡単にしているという感覚も持っておいた方が，定理の位置付けはよくわかるのではないかと思います．

なお安心のために補足しておきますが，具体的な関数空間 L^p $(1 \leq p < \infty)$ や Hilbert 空間を扱っているときには，その共役空間の元をたくさん具体的に作ることができるので，Hahn–Banach の定理が本当

[*5] Lebesgue 測度による f の積分を単に $\int f$ と書くことにします．

[*6] しかし一方で $\ell(fg) = \ell(f)\ell(g)$ という代数的な良い性質は失われます．

[*7] 中には拘る人もいて，選択公理を否定すれば $(\ell^\infty)' = \ell^1$ としても矛盾はしないということが証明されていたりします．ただ選択公理は Hahn–Banach 以外にも使うので，やはり避けるべきとは思いません．

に必要になることはほとんどありません．ある意味では，そういう具体的な空間で成り立つことの公理化の一つの形が Hahn–Banach の定理と言ってもよいかも知れません．

8.5　第二共役空間

最後に，第二共役空間という概念も次の章で一度だけ使うので，用語を導入しておきます．ノルム空間 X の共役空間 X' はそれ自身が作用素ノルムについてノルム空間になるのでした．すると X' の共役空間 X'' も考えることができて，第二共役空間といいます．これは忠実に書くと

$$X \text{ 上の有界線型汎関数全体の空間の上の有界線型汎関数の全体}$$

という想像するのが難しいものになりますが，例えば $x \in X$ を固定して $X' \ni \phi \mapsto \phi(x)$ という写像を考えると X'' に属することがわかります㊟．この意味で自然に $X \subset X''$ になっています．ここで有限次元の線型空間の二重双対については上の自然な埋め込みによって $X^{**} \simeq X$ が成り立つのでした．しかし無限次元のノルム空間の設定では，この章で証明したように

$$L^1(\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{共役空間}} L^\infty(\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{共役空間}} L^\infty(\mathbb{R})' \not\simeq L^1(\mathbb{R})$$

と戻ってこられないこともあることがわかったわけです．

演習問題 8.5.1. $(X, \|\cdot\|)$ を完備でないノルム空間とする．上のように自然に $X \subset X''$ と見なして，X の X'' の中での閉包 $\overline{X}$ を考えると，これが X の完備化を与えることを示せ．（ヒント：定理 4.3.1 の証明を見直して，X が完備でなくても X' は完備，従って X'' も完備であることをまず示す．）

8.6　補遺：無限次元ノルム空間の閉球は非コンパクト

「関数解析入門」で無限次元ノルム空間の閉球はコンパクトでないことを紹介しました．この事実を Hahn–Banach の定理を使って鮮やかに証明することができます．実はより強く，X が無限次元なら閉単位球の境界 $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ がコンパクトでないことがわかります．対偶をとって，「S がコンパクトならば X は有限次元」を示しましょう．

任意の $x \in S$ に対して，Hahn–Banach の定理により $\phi_x(x) = 1$ となる $\phi_x \in X'$ が存在して，とくに $x \notin \mathrm{Ker}(\phi_x)$ です．この ϕ_x は連続なので $\mathrm{Ker}(\phi_x)$ は閉集合で，従って $\{X \setminus \mathrm{Ker}(\phi)\}_{\phi \in X'}$ は S の開被覆になっています．ここで S がコンパクトと仮定すると，有限被覆が選べるので

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{N} X \setminus \mathrm{Ker}(\phi_j) = X \setminus \bigcap_{j=1}^{N} \mathrm{Ker}(\phi_j)$$

となります．ところが $\bigcap_{j=1}^{N} \mathrm{Ker}(\phi_j)$ は線型部分空間なので $\{0\}$ でない限り S と交わります．従って $\bigcap_{j=1}^{N} \mathrm{Ker}(\phi_j) = \{0\}$ となるしかなく，このとき

$$X \ni x \mapsto (\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_N(x)) \in \mathbb{C}^N$$

は単射になります．このことから X は $\mathbb{C}^N$ のある部分空間と線型同型になるので，有限次元です．　□

第 9 章

弱収束・汎弱収束

前の章は Hahn–Banach の定理でノルム空間 X の共役空間 X' が多くの「測定器」を含むことを示しました．これらの結果はこの章で「弱収束」と呼ばれる新しい収束概念を定めるのに使われます．弱収束はその名の通り弱い収束概念で，普通の意味で収束するとは考えられない関数列（例えば $L^2[0,2\pi]$ の $f_n(x)=\sin(nx)$ など）もこの意味では収束します．このように収束概念を弱めることは，弱解を考えたときのようにある種の存在証明を容易にするご利益があります．次の章で偏微分方程式への応用なども述べます．

ただし L^∞ のように共役空間が複雑でよくわからない状況では，弱収束はあまり有用ではないこともあり，そのために少し違った「汎弱収束」という概念も導入します．この汎弱収束は定義できる状況が限られる一方で，実は弱収束より良い性質を持ちます．

9.1 弱収束，汎弱収束

有限次元のノルム空間 $\mathbb{C}^d$ では，点列のノルム収束は各座標成分の収束と同値です．一方で点の座標成分を返す線型汎関数は（有限次元の場合は）共役空間の基底になるので，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が x にノルム収束することは次と同値になります：

$$\forall \phi \in X', \quad \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \phi(x). \tag{w}$$

しかし無限次元空間の場合には，一般には全ての座標が収束するからと言ってノルム収束するとは限らず，(w) は新しい収束概念を定めます．

定義 9.1.1. ノルム空間 X の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $x\in X$ に対して (w) が成り立つとき，x_n は $n\to\infty$ で x に弱収束するといい $x_n \overset{\mathrm{w}}{\to} x$ $(n\to\infty)$ と書く．

確認問題 9.1.2. $\ell^1(\mathbb{N})$ において，全ての成分が 0 に収束してもノルム収束するとは限らないことを確かめよ．さらに，全ての成分が 0 に収束しても弱収束するとも限らないことを確かめよ．

弱収束する点列の例をいくつか挙げましょう．まず x_n が x にノルム収束するなら，明らかに弱収束します．次に Hilbert 空間の場合は，Riesz の定理により弱収束は任意の点との内積が収束することと同値

になります．従って，例えば $\ell^2(\mathbb{N})$ において第 n 項が 1 で他が 0 という数列 δ_n は

$$\forall x \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad \langle \delta_n, x \rangle = x_n \to 0, \quad n \to \infty$$

なので 0 に弱収束します．実はより一般に，Hilbert 空間 H の正規直交系 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $n \to \infty$ において 0 に弱収束します．実際 Bessel の不等式から任意の $y \in H$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, y \rangle|^2 \leq \|y\|_H^2$$

なので，和の各項は 0 に収束します．

この例は，最初に述べた $L^2[0, 2\pi]$ の $f_n(x) = \sin(nx)$ が 0 に収束することも示しています．しかし関数空間における弱収束の感覚を掴むためには，Bessel の不等式を使わない直接証明も考えてみるのが良いと思います：

確認問題 9.1.3. Riemann–Lebesgue の補題を使って，$L^2[0, 2\pi]$ で $f_n \overset{\mathrm{w}}{\to} 0$ を直接証明せよ．（ヒント：$C_{\mathrm{per}}[0, 2\pi]$ は $L^2[0, 2\pi]$ で稠密.）

ノルム収束と弱収束は一般には異なりますが，例外もあります：

演習問題 9.1.4. $\ell^1(\mathbb{N})$ においては，弱収束列は同時にノルム収束もすることを示せ[*1].

ノルム空間の点列が弱収束するときに，その収束極限は一つに定まるのでしょうか？こういう問題は位相を弱める議論に慣れていないと意味がわかりにくいかもしれませんが，例えば $\ell^\infty(\mathbb{N})$ で最初の N 項が収束するときに w_N 収束するということにすると（この講義だけの造語です），

$$(\underbrace{\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}}_{N \text{ 個}}, 0, \ldots) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{w}_N} \begin{cases} (0, 0, \ldots), \\ (\underbrace{0, \ldots, 0}_{N \text{ 個}}, 1, \ldots) \text{ etc.} \end{cases}$$

のように極限は複数あります[*2]．しかし弱収束については Hahn–Banach の定理があるので，$x_n \overset{\mathrm{w}}{\to} x$ かつ $x_n \overset{\mathrm{w}}{\to} y$ ならば $x = y$ がわかります．実際，任意の有界線型汎関数 ϕ に対して，$\phi(x) = \phi(y) = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n)$ から $x = y$ が従います．

ノルム空間 X の共役空間 X' においては，もちろん X'' を使って弱収束が考えられますが，それとは別に X の元を「測定器」と考えて次のような収束概念も考えることができます：

定義 9.1.5. ノルム空間 X の共役空間 X' の点列 $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $\phi \in X'$ に対して，

$$\forall x \in X, \quad \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi(x)$$

が成り立つとき，ϕ_n は $n \to \infty$ で ϕ に汎弱収束するといい $\phi_n \overset{\mathrm{w}^*}{\to} \phi$ $(n \to \infty)$ と書く．

[*1] ただしこれはあくまで例外で，基本的には二つの収束は異なるものと認識してください．ちなみに $\ell^1(\mathbb{N})$ でも弱収束を定める位相とノルム位相は一致しません．

[*2] 位相の言葉でいえば，Hausdorff でないということです．

前の章の最後に述べたように $X \subset X''$ なのでこれは X' の弱収束より弱く，L^∞ のようにその共役空間が巨大で難しいときに有効な考え方です．汎弱収束に対しては極限の一意性は，Hahn–Banach の定理を使わずに簡単に示せます㊓（ヒント：全ての点で値が一致する関数は，同じ関数）．

9.2 弱収束，汎弱収束の一般的性質

ここからさらに弱収束，汎弱収束の性質を見ていくのに，一つ大定理が必要になります．証明は第 11 章で説明します．

定理 9.2.1 (一様有界性原理)**.** $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を Banach 空間 X からノルム空間 Y への有界線型作用素の族で，各点 $v \in X$ に対して $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda v\|_Y < \infty$ であるとする．このとき $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\|_{\mathrm{op}} < \infty$ である．

これは各点での有界性から一様有界性が出るという，有用な結果です．しかし微積分に馴染んだ皆さんには，次の「連続線型写像の各点収束極限は連続」という系の方が意義がわかりやすいかも知れません．

系 9.2.2 (Banach–Steinhaus の定理)**.** $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を Banach 空間 X からノルム空間 Y への有界線型作用素の族で，各点 $x \in X$ に対して $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ が存在するとする．このとき T は有界線型作用素であり，$\|T\|_{\mathrm{op}} \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathrm{op}} < \infty$.

例えば弱収束と汎弱収束には共通の以下の性質が示せます．

命題 9.2.3. X を Banach 空間とする．このとき以下が成り立つ：

1. $x_n \overset{\mathrm{w}}{\to} x$ $(n \to \infty)$ ならば $\|x\|_X \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X$,
2. $\phi_n \overset{\mathrm{w}^*}{\to} \phi$ $(n \to \infty)$ ならば $\|\phi\|_{X'} \le \liminf_{n\to\infty} \|\phi_n\|_{X'}$,
3. 弱収束列は $\|\cdot\|_X$ について有界である,
4. 汎弱収束列は $\|\cdot\|_{X'}$ について有界である,

Proof. 一つ目は第 8 章の定理 8.3.1 に出てくる ϕ_x を使えば,

$$\|x\|_X = \phi_x(x) = \liminf_{n\to\infty} \phi_x(x_n) \le \liminf_{n\to\infty} \|\phi_x\|_{\mathrm{op}} \|x_n\|_X$$

となって $\|\phi_x\|_{\mathrm{op}} = 1$ だったことを思い出せばわかります．一方で二つ目は Banach–Steinhaus の定理そのものです．

三つ目の証明はちょっとトリッキーです．まず $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を弱収束列とすると，すべての $\phi \in X'$ に対して $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n)$ が存在することから $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\phi(x_n)| < \infty$ であることに注意します．ここで $x_n \in X''$ と見なすことで，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に一様有界性原理が使えて，$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{X''} < \infty$ となります．これと $\|x_n\|_{X''} = \|x_n\|_X$ という事実㊓（Hahn–Banach を復習）を組み合わせると，$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X < \infty$ となるので $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界です．

一方で四つ目は単純で，$(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が汎弱収束列なら，とくにすべての $x \in X$ に対して $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\phi_n(x)| < \infty$ であり，一様有界性原理から

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\phi_n\|_{X'} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\phi_n\|_{\mathrm{op}} < \infty$$

となるので $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界です. □

これらの証明は，主に新しい収束概念に慣れるためと，一様有界性原理および Banach–Steinhaus の定理の動機付けとして紹介していますが，一つ目の性質だけは次の章で一度使います.

9.3　汎弱収束による点列前コンパクト性

次に汎弱収束に対してのみ成り立つ有用な結果を紹介します.

定理 9.3.1. X が可分なら，X' の任意の有界点列は汎弱収束する部分列を含む.

これはノルムに関して有界な集合が汎弱収束に関しては点列前コンパクトという結果です．無限次元のノルム空間では閉単位球ですら（ノルム位相では）コンパクトではなかったことを思い出すと，収束概念を弱めたことの効果が出ていることがわかります.

Proof. 証明は三段階に分かれます．$(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X' の有界点列とします．X は可分なので稠密な可算集合 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ がとれます．まず x_1 に対しては $(\phi_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{C}$ の有界列なので，Bolzano–Weierstrass の定理により収束部分列 $(\phi_{s_1(n)}(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ を持ちます．以下帰納的に $(\phi_{s_k(n)}(x_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ から収束部分列 $(\phi_{s_{k+1}(n)}(x_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}} \subset (\phi_{s_k(n)}(x_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ がとれて，$(\phi_{s_n(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ を考えるとこれはすべての $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ に対して収束します[*3].

したがって $\phi_{s_n(n)}$ の $n\to\infty$ の極限として $\phi\colon \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ という写像が定まります．ここで $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が X' で有界だったことを思い出すと，この写像はすべての $k,l\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}|\phi(x_k)-\phi(x_l)| &= \lim_{n\to\infty} |\phi_{s_n(n)}(x_k)-\phi_{s_n(n)}(x_l)| \\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\phi_n\|_{X'}\|x_k-x_l\|_X\end{aligned}$$

を満たすので，$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 上で一様連続です．したがって距離空間の一般論「稠密な部分集合の上で一様連続な関数は，一意的に全体に連続拡張できる」を使って，$\phi\colon X\to\mathbb{C}$ という連続線型汎関数が定まります.

最後に一般の $x\in X$ に対しては，$|\phi(x)-\phi_{s_n(n)}(x)|$ を $|\phi(x)-\phi(x_k)|$, $|\phi(x_k)-\phi_{s_n(n)}(x_k)|$, $|\phi_{s_n(n)}(x_k)-\phi_{s_n(n)}(x)|$ の和で上から評価することで，$\lim_{n\to\infty}\phi_{s_n(n)}(x)=\phi(x)$ が言えるので，$\phi\in X'$ は $(\phi_{s_n(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ の汎弱収束極限です. □

汎弱収束に対しては有界集合が点列前コンパクトという良い性質が成り立つことがわかりましたが，一方で汎弱収束には弱点もあり，それは共役空間でしか定義できないことです．Banach 空間が与えられたときに，それが別のノルム空間の共役空間になっているとは限りません.

演習問題 9.3.2. $L^1(\mathbb{R})$ はいかなるノルム空間の共役空間でもないことを示せ.

さらに例えば正則な複素測度の全体が C_{c} の共役空間でもあり，C_0 の共役空間でもあったように，与えられた Banach 空間に汎弱位相を定める方法は，あったとしても一つとは限りません．しかし特別に良い状況が一つあって，それは X が Hilbert 空間の場合です．このときは Riesz の定理により，弱収束も

[*3] こういう部分列の取り方を使う議論を対角線論法といいます.

汎弱収束も「すべての点との内積が収束」という同じ概念になります[*4]．この場合を次の章の応用で使います．

9.4 補遺：Hilbert 空間の有界集合は点列前コンパクト

すぐ上に述べたように，Hilbert 空間の設定では定理 9.3.1 は弱収束に関する主張になりますが，実はさらに可分という仮定が簡単に外せて，記述が簡明になるので証明しておきます．

定理 9.4.1. Hilbert 空間 H の任意の有界点列は弱収束する部分列を含む．

Proof. この定理は H が可分のときには既に示しました．与えられた有界点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して H の部分空間

$$H_1 = \overline{\operatorname{span}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$$

を考えます（閉包はノルム位相でとります）．これは定義から閉部分空間なので，H と同じ内積で Hilbert 空間になります．さらに可算集合

$$\left\{\sum_{n=1}^{N} q_n x_n \colon N\in\mathbb{N}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}+\sqrt{-1}\mathbb{Q}\right\}$$

がその中で稠密なので可分です．すると可分の場合の結果を使って $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は H_1 で弱収束する部分列を持つことがわかります．

これで終わりのように見えるのですが，そうではありません．（部分列は既にとってあることにして）$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が H_1 で弱収束するとは

$$\forall y\in H_1,\quad \langle x_n, y\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle$$

ということでしたが，いま証明したいのは $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が H で弱収束することで，それは

$$\forall y\in H,\quad \langle x_n, y\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle$$

ということです．従って $y\in H\setminus H_1$ に対する収束を示すことが残っています．しかしこれは $H = H_1\oplus H_1^{\perp}$ と直交直和分解して $y = y_1+y_2$ と書けば，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset H_1$ だったことから $\langle x_n, y\rangle = \langle x_n, y_1\rangle$ となるので問題ありません． □

可分性の仮定は「反射的 Banach 空間の有界集合は弱点列前コンパクト」というより一般の定理でも外すことができますが，上のように作った H_1 が反射的になることが非自明になったり，最後のステップで直交直和分解が使えないので面倒なことになります．

[*4] 実は Banach 空間でも然るべき意味で $X = X''$ と見なせることはあって，反射的というのですが，正確に定義して理論を展開するのはそれなりに大変です．[黒田]，[増田] などを参照してください．

第 10 章

弱収束・汎弱収束の応用

この章は弱収束の例の紹介と応用です．δ 測度を線型汎関数と見る解釈，Poisson 方程式の弱解の存在と一意性の別証明，コンパクト自己共役作用素の固有値の存在，の 3 つの話題を取り上げます．

10.1 汎弱収束極限としての δ 関数

最初に紹介するのはただの例ですが，「関数解析入門」で学んだ結果を汎弱収束を使って再解釈するものです．関数 $f \in C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ の Poisson 積分

$$P_r f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{1-r^2}{2\pi(1-2r\cos(x-y)+r^2)} \mathrm{d}y$$

について，$r \nearrow 1$ の極限において $P_r f(x) \to f(x)$ が成り立つのでした（もっと強いことを示しましたが）．ここで被積分関数の分数の部分を Poisson 核と言って $P_r(x-y)$ と書いていました．これを y の関数と考えると，$y = x$ においては $P_r(0) = \frac{1-r^2}{2\pi(1-r)^2}$ なので $r \nearrow 1$ で発散し，一方で $y \neq x$ では 0 に収束します．従って関数としては $P_r(x-y) \xrightarrow{r\nearrow} 0$ と概収束していて，その世界では

$$\lim_{r\nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) P_r(x-y) \mathrm{d}y \neq \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cdot 0 \, \mathrm{d}y$$

という，積分と極限の順序交換の反例のようなものになっています．

ここで視点を変えて，$f \mapsto P_r f(x)$ は $C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ 上の連続線型汎関数と見ることにしましょう（連続性も線型性もすぐわかります）．このとき Riesz–Markov–Kakutani の定理により，$P_r(x-\cdot)$ は関数としてではなく，$P_r(x-y)\mathrm{d}y$ という測度と見るべきということになります．この世界では δ 測度を使って $f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\delta_x(\mathrm{d}y)$ と表せたことを思い出すと，$P_r f(x) \xrightarrow{r\nearrow 1} f(x)$ は

$$\lim_{r\nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) P_r(x-y) \mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \delta_x(\mathrm{d}y)$$

と書き換えられます．これがすべての $f \in C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ に対して成り立つのですから，

$$P_r(x-y)\mathrm{d}y \xrightarrow{r\nearrow 1} \delta_x(\mathrm{d}y)$$

が $C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]'$ における汎弱収束の意味で成り立っています．

10.2　Poisson 方程式の弱解の存在: take 2

第 9 章の汎弱収束に関する結果を使って，Poisson 方程式の弱解の存在の別証明をしてみます．これは実は第 2 章で述べた Hilbert による Dirichlet 原理の証明により近い方法です．第 2 章と同様，偏微分方程式の理論では実数値関数に限って考えることも多いので，この節では関数空間は実数値とし，従ってノルム空間の係数体も $\mathbb{R}$ とします．まず弱解の概念を思い出しましょう．$D \subset \mathbb{R}^d$ を境界 ∂D が滑らかで有界な領域（連結な開集合）とし，与えられた関数 $f \in L^2(D)$ に対して，未知関数を u とする境界値問題

$$\Delta u = f, \quad u|_{\partial D} = 0$$

を考えます．この弱解とは

$$u \in H^1_0(D) \text{ で，すべての } \phi \in H^1_0(D) \text{ に対し } -\langle u, \phi \rangle_{H^1} = \langle f, \phi \rangle_{L^2} \text{ を満たすもの}$$

でした．

実はこれは次の変分問題

$$u \in H^1_0(D) \text{ で，} I(u) = \tfrac{1}{2}\|u\|^2_{H^1} + \langle f, u \rangle_{L^2} \text{ を最小にするもの}$$

の解と一致します．実際 u がこの変分問題の解ならば任意の $\phi \in H^1_0(D)$ に対して，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\tfrac{1}{2}\|u + t\phi\|^2_{H^1} + \langle f, u + t\phi \rangle_{L^2}\big)\Big|_{t=0} = 0$$

ですが，この左辺はノルムを内積で表して展開すればわかるように $\langle u, \phi \rangle_{H^1} + \langle f, \phi \rangle_{L^2}$ なので，u は弱解です．逆に弱解 u が存在すれば変分問題の解であることも，一般の $v \in H^1_0(D)$ に対して $I(v) = I(u + (v - u))$ と書いて少し変形してみれば $I(u) + (\text{正の項})$ となることからわかります㊟．

この変分問題の解の存在を，前の章で示した「Hilbert 空間の有界集合は弱収束に関して点列前コンパクト」を使って示しましょう．初めに $I(0) = 0$ なので，$\inf_{u \in H^1_0(D)} I(u) < \infty$ であることに注意します[*1]．すると $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1_0(D)$ を $I(u_n) \xrightarrow{n\to\infty} \inf_{u\in H^1_0(D)} I(u)$ となる点列（最小化列）としたときに，$(I(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は有界です．まずこの点列が $H^1_0(D)$ で有界であることを示します．このためには Schwarz, Poincaré の不等式を使って

$$|\langle f, u_n \rangle_{L^2}| \le c\|f\|_{L^2}\|u_n\|_{H^1}$$

と評価します．すると I の定義から

$$I(u_n) \ge \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H^1} - c\|f\|_{L^2}\|u_n\|_{H^1}$$

となって，$(I(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は有界だったので $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の H^1-ノルムも有界であることがわかります．これで上で述べた定理を使って $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ から $H^1_0(D)$ で弱収束する部分列 $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ を抜き出すことができます．

[*1] 自明なことを確認しているだけに見えるかも知れませんが，重要なステップです．これを確認しないと以下の議論はできません．そして少し異なる問題 $\Delta u = 0, \quad u|_{\partial D} = f$ の場合には，実際に対応する変分問題の下限が ∞ になることが起こります．

こうして見つけた弱収束部分列 $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ の極限 u が変分問題の解であることを示しましょう．第 9 章の命題 9.2.3 から

$$\|u\|_{H^1} \le \liminf_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|_{H^1}$$

です．一方で $H_0^1(D) \subset L^2(D)$[*2]（で位相も $H_0^1(D)$ の方が強いこと）から $H_0^1(D)' \supset L^2(D)'$ となることに注意すると，u_{n_k} が u に $H_0^1(D)$ で弱収束することから $\langle f, u_{n_k}\rangle_{L^2} \to \langle f, u\rangle_{L^2}$ もわかります㊒．これで

$$I(u) \le \lim_{k\to\infty} I(u_{n_k}) = \inf_{v\in H_0^1(D)} I(v)$$

がわかったので，u は変分問題の解です． □

このように収束概念を弱めることで極限を見つけやすくして，見つけた極限が方程式の解であることは別の方法で確かめる，というのはよく使われる考え方です．

演習問題 10.2.1. 上で $H_0^1(D) \subset L^2(D)$ と位相の関係から $H_0^1(D)' \supset L^2(D)'$ を導いた．ところが Riesz の表現定理によると

$$L^2(D) \simeq L^2(D)', \quad H_0^1(D) \simeq H_0^1(D)'$$

であった．何かおかしくないだろうか？[*3]

10.3　コンパクト自己共役作用素の固有値

次に第 6 章で Hilbert–Schmidt の展開定理の証明で使った「飛び道具」の少し違う形式での証明をします．

補題 10.3.1. K を Hilbert 空間 $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上のコンパクト自己共役作用素とすると，固有値の列で $|\mu_1| \ge |\mu_2| \ge \cdots$ となるものが存在する．

Proof. 第 6 章の証明では作用素 K^2 を考えましたが，この章では

$$\mu_1 = \sup\{|\langle Kx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \le 1\}$$

と $-\mu_1$ のどちらかは固有値であることを示します[*4]．そのために $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\|x_n\| \le 1$ かつ $|\langle Kx_n, x_n\rangle| \to \mu_1$ $(n\to\infty)$ となるようにとります．ここで前の章で示したように Hilbert 空間の有界集合 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はある $x \in H$ に弱収束する部分列を含みます．この極限について第 9 章の命題 9.2.3 から $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \le 1$ です．

さらに第 6 章の補題 6.3.4 も使うと，必要ならさらに部分列を取って $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はある $y \in H$ にノルム収束するようにできます．以下では記号の簡略化のため，元の点列に対して二つの収束が成り立つとし

[*2] これについては，正確にはこの節の補遺で説明します．
[*3] 言うまでもなく，結論は「何もおかしくない」なので，何がおかしいのかわからなくても心配しないでください．初見で何かおかしいのでは，と思ってしまった人がその理由を考える問題です．
[*4] これは本質的に Rayleigh–Ritz の変分公式と呼ばれているものです．

ます．このとき任意の $z \in H$ に対して

$$\langle y, z\rangle \overset{\text{ノルム収束}}{=} \lim_{n\to\infty}\langle Kx_n, z\rangle \overset{K\text{ は対称}}{=} \lim_{n\to\infty}\langle x_n, Kz\rangle$$
$$\overset{\text{弱収束}}{=} \langle x, Kz\rangle \overset{K\text{ は対称}}{=} \langle Kx, z\rangle$$

であることに注意すると，$y = Kx$ です．すると

$$\mu_1 = \lim_{n\to\infty}|\langle Kx_n, x_n\rangle| = |\langle Kx, x\rangle|$$

となって，$\|x\| \le 1$ だったので μ_1 は最大値です．以下ではこの最大値が $\langle Kx, x\rangle \ge 0$ となる x によって達成されている場合をまず考えます．

演習問題 10.3.2. 上の「必要なら」は実は必要ないことを示せ．

ここで $x = 0$ と $x \ne 0$ の二つの場合がありますが，とりあえず（より面白い）$x \ne 0$ の方から考えます．このとき x が固有ベクトルになることを示すのですが，その方針は“幾何学的”で

- x が固有ベクトルであることは x と Kx が平行であること，
- それは Kx が x に直交する成分を持たないこと，
- それは Kx が x に直交するすべてのベクトルと直交すること㊓，

の三つ目を確かめることで示します．そこで $z \perp x$ となる $z \in H$ と $\varepsilon \in \mathbb{R}$ をとって，μ_1 が最大値であることを使うために

$$\begin{aligned}\langle K(x+\varepsilon z), x+\varepsilon z\rangle &= \mu_1 + \varepsilon\langle Kx, z\rangle + \varepsilon\langle Kz, x\rangle + \varepsilon^2\langle Kz, z\rangle \\ &= \mu_1 + 2\varepsilon\mathrm{Re}\langle Kx, z\rangle + \varepsilon^2\langle Kz, z\rangle\end{aligned} \tag{10.3.1}$$

と展開します．ただしこの $x + \varepsilon z$ は単位球に含まれるとは限らないので，代わりに $\frac{x+\varepsilon z}{\|x+\varepsilon z\|}$ を考えることにしましょう．

ここで $z \perp x \Leftrightarrow \langle x, z\rangle = 0$ を思い出すと

$$\|x + \varepsilon z\|^2 = \|x\|^2 + \varepsilon^2\|z\|^2$$

なので，上の (10.3.1) に代入すると $\varepsilon \to 0$ において

$$\begin{aligned}\left\langle K\tfrac{x+\varepsilon z}{\|x+\varepsilon z\|}, \tfrac{x+\varepsilon z}{\|x+\varepsilon z\|}\right\rangle &= \tfrac{\mu_1}{\|x\|^2+\varepsilon^2\|z\|^2} + 2\varepsilon\tfrac{\mathrm{Re}\langle Kx,z\rangle}{\|x\|^2+\varepsilon^2\|z\|^2} + \varepsilon^2\tfrac{\langle Kz,z\rangle}{\|x\|^2+\varepsilon^2\|z\|^2} \\ &= \tfrac{\mu_1}{\|x\|^2} + 2\varepsilon\tfrac{\mathrm{Re}\langle Kx,z\rangle}{\|x\|^2} + O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

となります．いま $\|x\| \le 1$ なので，もし $\mathrm{Re}\langle Kx, z\rangle \ne 0$ ならそれと同じ符号で十分小さい ε を選べば (右辺)$> \mu_1$ となりますが，μ_1 の定義から (左辺)$\le \mu_1$ なので矛盾が生じます[*5]．従って $\mathrm{Re}\langle Kx, z\rangle = 0$ です．以上の議論の ε をすべて $\sqrt{-1}\varepsilon$ に置き換えれば $\mathrm{Im}\langle Kx, z\rangle = 0$ も示せるので，結局 $\langle Kx, z\rangle = 0$ です．

[*5] この議論で実は $\|x\| = 1$ でなければならないことも示されています．

ここまでの議論で $z \in H$ に対して

$$z \perp x \Rightarrow z \perp Kx$$

となったので，x が固有ベクトルであることがわかりました．さらに $\|x\| = 1$ と $\langle Kx, x\rangle = \mu_1$ から，$Kx = \mu_1 x$ であることもわかるので，μ_1 が固有値であることがわかりました．最大値である μ_1 が $\langle Kx, x\rangle \leq 0$ となる x によって達成されている場合は，$-\mu_1$ が最小値となるので，上で ε の符号の取り方を変えれば，議論は同じです．

一つ固有値が見つかったら，あとは第 6 章と同じで $\pm\mu_1$ に対応する固有空間を H_1 として

$$\mu_2 = \sup\{|\langle Kx, x\rangle| : x \in H_1^{\perp}, \|x\| \leq 1\}$$

を考えて同じ議論を繰り返すだけです．

残された $x = 0$ の場合は $\mu_1 = 0$ ですが，上の議論を $x, z \neq 0$ を弱収束極限とは無関係な任意のベクトルとして繰り返せば $\langle Kx, z\rangle = 0$ となって，それは K が恒等的に 0 という作用素であることを意味します．従ってこの場合も $\mu_1 = 0$ は固有値で，他の固有値はありません． □

弱収束に関する結果を使った新しい証明は，第 6 章で紹介した証明より長さは増えています．しかし唐突に K^2 を考えるようなトリッキーさはなく，もし対称（または Hermite）行列の固有値について Rayleigh–Ritz の公式にあたることを知っていれば，方針としても自然です．また早い段階で $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の極限である x を登場させて，その性質を議論すればよいことになるのも多くの人にとってわかりやすいと思いますし，変分公式の最大値を達成している x が固有ベクトルであるという事実も役に立つことがあります．そういうわけで，ここで紹介した証明は，長い分だけ結果の背景にある構造をより明らかにした証明と言えると思います．

10.4 補遺：$H_0^1(D) \subset L^2(D)$ について

この章の第 10.2 節では $H_0^1(D) \subset L^2(D)$ という事実を使いましたが，これは見た目より難しいのでここでその詳細を補足します[*6]．第 2 章では，Poincaré の不等式により $C_c^\infty(D)$ の H^1-Cauchy 列は L^2-Cauchy 列でもあることを注意し，それによって「$H_0^1(D)$ の元が $L^2(D)$ に属する関数と見なせる」と主張しました．しかし，よく考えるとこの主張は $H_0^1(D) \subset L^2(D)$ を意味しません．

まず $H_0^1(D)$ と $L^2(D)$ はそもそも全く異なる種類の元からなる集合なので，その間に包含関係などないはずで，まずは同じ種類の元に揃える操作が必要です．それは，上の「見なせる」を写像とすることで実現されます．しかしまだ問題は残っていて，$H_0^1(D)$ の元（$= H^1$-Cauchy 列の同値類）に対して $L^2(D)$ に属する関数を対応させることはできているものの，それが一対一であることが保証されていないのです．これでは「$H_0^1(D)$ では異なるのに $L^2(D)$ では同じ」[*7]ということがあり得て，$H_0^1(D) \subset L^2(D)$ と見なすには無理があります．実際，数学において「A が B の部分集合と見なせる」といったら，A から B への単射（埋め込みという）が存在することが標準的な解釈です．

[*6] 実は使わずに何とかする方法もありますが，この事実やその考え方は重要なので，ここで理解しておくほうが良いでしょう．

[*7] これは H^1 の位相が L^2 の位相より強いから，とくに不自然なことではありません．

そこで，ここでは「$H^1_0(D)$ で異なるものは $L^2(D)$ でも異なる」ことを証明しましょう．対偶を考えると，$C^\infty_{\mathrm{c}}(D)$ の H^1-Cauchy 列 $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が 0 に L^2 収束するなら，H^1 のノルムでも 0 に収束することを示せば十分です．そのために，まず任意の $\psi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(D)$ に対して，部分積分で

$$\int_D \phi_n \nabla\psi = \int_D \psi \nabla\phi_n$$

が成り立つことに注意しましょう．仮定から $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が 0 に L^2 収束するので，L^2 内積の $\|\cdot\|_{L^2}$ に関する連続性から左辺は 0 に収束し，従って右辺も 0 に収束します．ここで $C^\infty_{\mathrm{c}}(D)$ が $L^2(D)$ で稠密であることを使うと，いま示した

$$\text{任意の } \psi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(D) \text{ に対して } \int_D \psi\nabla\phi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

から $(\nabla\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $L^2(D)$ で 0 に弱収束することがわかります．ところが $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が H^1-Cauchy 列という仮定から，$(\nabla\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^2(D)$ でノルム収束することがわかっています．ノルム収束するなら弱収束して極限は一致するので，結局 $(\nabla\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に L^2 収束することになります．これを

$$\|\phi_n - 0\|_{H^1} = \|\nabla\phi_n - \nabla 0\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

と書き直せば，これが示すべきことでした． □

第 11 章

Baire のカテゴリー定理と一様有界性原理

第 9 章で一様有界性原理と Banach–Steinhaus の定理を結果だけ紹介して使いました．その証明には「Baire のカテゴリー定理」という，完備距離空間の集合の分類に関する少し難しい定理を使うのが標準的です[*1]．これは第 12 章と第 14 章でも，他の重要な定理を証明するのに使います．

11.1 Baire のカテゴリー定理

まず用語の準備をしてから，定理を述べます．

定義 11.1.1. 位相空間 X の部分集合 S が内点を持たない閉集合の可算和に含まれるとき，第一類 (first category) であるという．第一類でない集合を第二類 (second category) という[*2]．

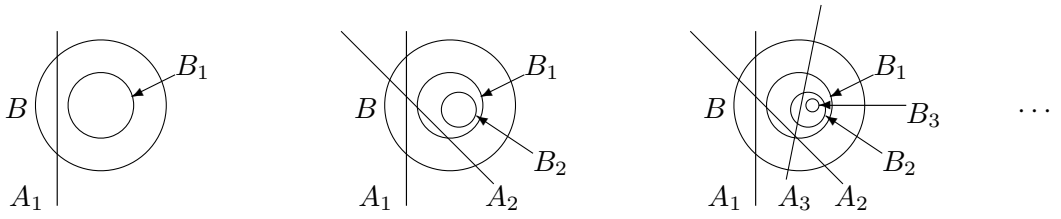
定理 11.1.2 (Baire のカテゴリー定理)**.** 完備距離空間において，第一類の部分集合は内点を持たない．

Baire のカテゴリー定理の証明は概要だけを述べておきます．詳細は各自確認してください．完備距離空間 X の開球 B と可算個の内点を持たない閉集合 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を任意にとって，$B \not\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を示すことが目標です．

1. A_1 は内点を持たないので，B の中には A_1 に含まれない点があります．その点を中心とする開球 B_1 を A_1 と交わらないようにとります．
2. $A_1 \cup A_2$ も内点を持たないので，上と同様に B_1 の中に $A_1 \cup A_2$ と交わらない開球 B_2 を $\overline{B_2} \subset B_1$ となるようにとれます．

[*1] 使わないと証明できないわけではありません．例えば arXiv:1005.1585 を参照．

[*2] これは Baire の定義ですが，用語が内容を反映していない難点があり，第一類の代わりに「やせた」(meager) という用語を使う人もいます．



このようにして開球の減少列 $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ が作れますが，とくに半径が 0 に収束するようにしておくと，X の完備性から $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}$ は X の点として存在します．さらに作り方からこの点は B には含まれますが，どの A_n にも含まれません．従って $B \not\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ です． □

この証明の概要では，定理の条件を一つ使っていないように見えるかも知れません．

確認問題 11.1.3. Baire のカテゴリー定理の証明で A_n が閉集合であることをどのように使ったか指摘せよ．

Baire のカテゴリー定理を見て，直ちにその有用性がわかる人は少ないでしょう．これからいくつかの章では，この定理から「一様有界性原理」,「開写像定理」,「閉グラフ定理」という三つの深い定理を導きます．そのことから Baire のカテゴリー定理が関数解析の抽象論における扇の要になっていることがわかると思います．ちなみに Baire がどういう文脈でこの定理にたどり着いたかは，W. Dunham,「微積分名作ギャラリー」に面白く書かれていて，このノートの第**??**章にも関連する内容をまとめておきましたので，興味があれば読んでみてください．

11.2　一様有界性原理と Banach–Steinhaus の定理の証明

第 9 章で使った一様有界性原理と Banach–Steinhaus の定理の内容を思い出しましょう．

定理 11.2.1 (一様有界性原理)**.** $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を Banach 空間 X からノルム付き線型空間 Y への有界線型作用素の族で，各点 $v \in X$ に対して $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda v\|_Y < \infty$ であるとする．このとき $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\|_{\mathrm{op}} < \infty$ である[*3].

系 11.2.2 (Banach–Steinhaus の定理)**.** $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を Banach 空間 X からノルム付き線型空間 Y への有界線型作用素の族で，各点 $x \in X$ に対して $T_n x$ は $n \to \infty$ で収束するとし，その極限を Tx とおく．このとき T は有界線型作用素であり，$\|T\|_{\mathrm{op}} \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathrm{op}} < \infty$.

X が完備でないときは $(C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ 上の $T_n f = n(f(1/n) - f(0))$ のような反例があります．

一様有界性原理の証明の概要を説明します．これは Baire のカテゴリー定理の単純な応用で，詳細は参考書で各自確認してください．概要は以下の通り：

$$X_n = \left\{ x \in X \colon \sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\|_Y \le n \right\}$$

とおくと，これは閉集合であり㊟，仮定より $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ です．従って Baire のカテゴリー定理より，

[*3] $\|T\|_{\mathrm{op}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\{\|Tu\|_Y \colon \|u\|_X = 1\}$ でした．

ある X_n は内点をもつので，$B(y,r) \subset X_n$ なる球が存在します．ここでは簡単のため $y=0$ の場合だけを考えることにすると，これは

$$\|x\|_X < r \Rightarrow \sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\|_Y \le n$$

を意味するので，とくに $\|x\|_X = r/2$ に限ると

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \sup_{\|x\|_X=r/2} \|T_\lambda x\|_Y \le n \Rightarrow \sup_{\lambda\in\Lambda} \sup_{\|x\|_X=1} \|T_\lambda x\|_Y \le \frac{2n}{r}$$

なので $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\|_{\mathrm{op}} < \infty$ です． □

Banach–Steinhaus の定理は，一様有界性原理から簡単に従います．まず $T_n x \to TX$ $(n\to\infty)$ で，ノルムは連続関数なので，

$$\|Tx\|_Y = \liminf_{n\to\infty} \|T_n x\|_Y \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathrm{op}} \|x\|_X$$

です．この両辺を $\|x\|_X$ で割ると，右辺は $x\in X$ に依らなくなって

$$\|T\|_{\mathrm{op}} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathrm{op}}$$

がわかります．

あとはこの右辺が有限であることを示せば，T が有界作用素になりますが，全ての $x\in X$ に対して $T_n x$ が収束することから $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\|_Y < \infty$ です．すると一様有界性原理から $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathrm{op}} < \infty$ となって，それより小さい $\liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathrm{op}}$ も有限です． □

11.3 du Bois-Raymond の定理

一様有界性原理には簡単なものから難しいものまで多くの応用があります．各自の本を参照してください．とくに [黒田，例題 7.22], [増田，例 4.2] は共役空間の復習としても良いと思いますので，各自で確認してください．

もう少し難しいものとして「関数解析入門」で紹介した Fourier 級数に関する以下の定理を証明します．

定理 11.3.1 (du Bois-Raymond)**.** $f\in C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ であって，その Fourier 級数が原点で発散するものが存在する．

ちなみに元の証明は一様有界性原理を使いませんが[*4]，そのアイデアは前に脚注で紹介した Sokal (Hahn) の議論に非常に近いものです．そのことから，この定理は一様有界性原理の応用というより先祖であることがわかります．

$f\in C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ の Fourier 級数の部分和は，Dirichlet 核

$$D_N(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\sin\bigl((N+\frac{1}{2})z\bigr)}{2\pi\sin(\frac{z}{2})}$$

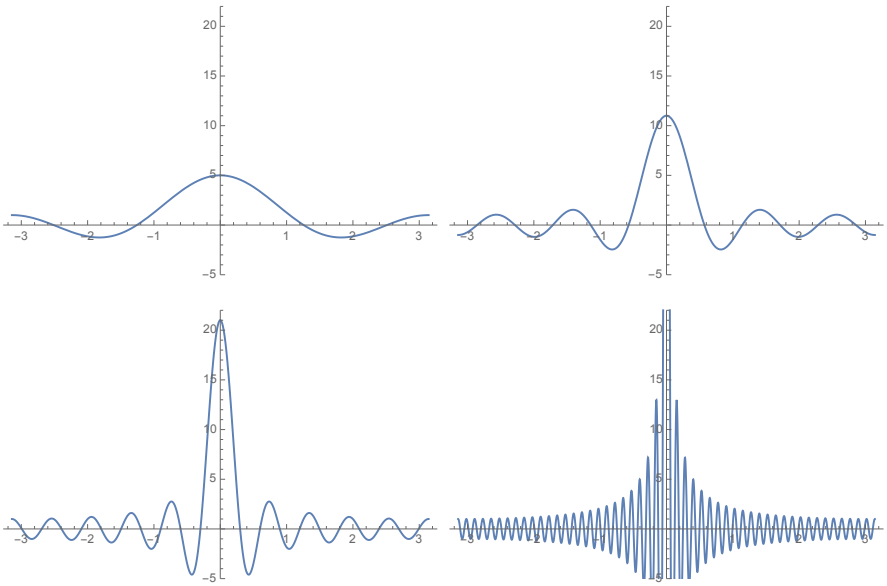
[*4] その証明は T.W. Körner, 「フーリエ解析大全」の 1.18 節に再現されています．

を使って次のように表せます：

$$\begin{aligned} S_N f(x) &\overset{\text{def}}{=} \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} \mathrm{d}y \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

これは x の関数と見た場合には「畳み込み作用素」と呼ばれるものの一例になっていますが，ここでは原点での値 $T_N f \overset{\text{def}}{=} S_N f(0)$ だけに興味があります．

Dirichlet 核のグラフを見ておくことは証明の理解の助けになるので，$N = 2, 5, 10, 50$ のグラフを Mathematica で描いたものを貼っておきます．



du Bois-Raymond の定理の証明．証明の流れは以下の通りです：

(1) $T_N \colon (C_{\mathrm{per}}[-\pi, \pi], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{C}$ は有界作用素であることを示す．
(2) $\|T_N\|_{\mathrm{op}} \geq \|D_N\|_{L^1}$ を示す（実は等号が成立）．
(3) $\|D_N\|_{L^1} \to \infty$ $(N \to \infty)$ を示す．

これらがわかると一様有界性原理の対偶から，ある $f \in C_{\mathrm{per}}[-\pi, \pi]$ が存在して $\sup_{N \in \mathbb{N}} |S_N f(0)| = \infty$ であることが従います．しかし (1) から N が有限のときは $|S_N f(0)| < \infty$ なので，結局 $|S_N f(0)| \to \infty$ $(N \to \infty)$ となるしかありません．一つ目の性質は簡単なので問題にしておきます：

確認問題 11.3.2. 上の (1) を示せ．

二つ目の $\|T_N\|_{\mathrm{op}} \geq \|D_N\|_{L^1}$ については，符号関数 sgn を使って

$$\|D_N\|_{L^1} = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(z) \mathrm{sgn}(D_N(z)) \mathrm{d}z$$

と表せることに注意します．ここで D_N のグラフを見れば，$\mathrm{sgn}(D_N(\cdot))$ に各点収束する $f_n \in C_{\mathrm{per}}[-\pi, \pi]$

であって $\|f_n\|_\infty = 1$ であるものが作れることがわかります．この f_n に対し

$$\begin{aligned}|T_N f_n| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} D_N(z) f_n(z) \mathrm{d}z\right| \\ &\geq \|D_N\|_{L^1} - \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(z)||f_n(z) - \mathrm{sgn}(D_N(z))| \mathrm{d}z\end{aligned}$$

として，D_N が有界であることに注意すれば Lebesgue の収束定理から右辺は $n \to \infty$ で $\|D_N\|_{L^1}$ に収束します．これで $\|T_N\|_{\mathrm{op}} \geq \|D_N\|_{L^1}$ が示せました．

三つ目の $\|D_N\|_{L^1} \to \infty$ $(N \to \infty)$ は直接計算で示します．D_N が符号を変える点は $\frac{2k\pi}{2N+1}$ $(k = -N, -N+1, \dots, N)$ なので，

$$\|D_N\|_{L^1} \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N-1} \left| \int_{\frac{2k\pi}{2N+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2N+1}} \frac{\sin\big((N+\frac{1}{2})z\big)}{\sin(\frac{z}{2})} \mathrm{d}z \right|$$

です．ここで $|\sin(\frac{z}{2})| \leq |z|/2$ と $\int_{\frac{2k\pi}{2N+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2N+1}} \sin\big((N+\frac{1}{2})z\big)\mathrm{d}z = \pm\frac{4}{2N+1}$ を使うと上の和の $k \geq 0$ の部分は

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{\frac{2k\pi}{2N+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2N+1}} \frac{\sin\big((N+\frac{1}{2})z\big)}{\sin(\frac{z}{2})} \mathrm{d}z \right| \geq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{4}{2(k+1)\pi}$$

と評価できて，この右辺は $N \to \infty$ で発散する級数です．これで全ての証明が終わりました． □

上の証明では，一様有界性原理の対偶を使いました．一様有界性原理の理解を深めるために，その主張について少し補足しておきます．まず対偶命題は（上の応用に合わせて $\Lambda = \mathbb{N}$ とすると），

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathrm{op}} = \infty \text{ ならば，ある } x \in X \text{ が存在して, } \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| = \infty \tag{UB}$$

です．ここで作用素ノルムの定義を思い出すと，$n \in \mathbb{N}$ 毎には，ある $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$ が存在して，

$$\|T_n x_n\| \geq \|T_n\|_{\mathrm{op}} - 1$$

となります．従って $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathrm{op}} = \infty$ の仮定から，$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x_n\| = \infty$ がわかります．これは T_n の拡大率が大きくなる方向に x_n を毎回取り直せば[*5]，$\|T_n x_n\|$ はいくらでも大きくできる，ということです．一様有界性原理（の対偶）は，この取り直しが必要なく，一つの x で $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| = \infty$ とできると主張しているわけで，そう見るとかなり強い主張をしていることが感じられると思います．

ちなみに有限次元ノルム空間の場合は，上の $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ から収束部分列をとるだけで x が作れるので非常に簡単で，それを確かめるのも理解を深めるのに良いと思います．

確認問題 11.3.3. 有限次元ノルム空間（$\mathbb{C}^d$ に限ってもよい）上の線型作用素の列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，(UB) を直接証明せよ．

[*5] 「追跡すれば」と言った方が感覚が伝わるかも知れません．

11.4　補遺：代数基底の係数がほとんど非有界であることの別証明

X を無限次元の Banach 空間とし，E をその代数的基底とします．このとき任意の $x \in X$ は E の有限個の線型結合として

$$x = \sum_{e \in E} \phi_e(x) e$$

と表せます．この ϕ_e は X 上の線型汎関数になっていますが，これが有限個を除いて有界線型汎関数ではないことを第 1 章で証明しました．ここではこの事実を一様有界性原理を使って証明してみます．

無限集合 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ に対して，すべての $\{\phi_{e_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界であると仮定して矛盾を導きましょう．まず $\phi_{e_n}(e_n) = 1$ なので $\|\phi_{e_n}\|_{\mathrm{op}} > 0$ であることに注意します．有界線型汎関数は定数倍しても有界ですから $\{\psi_{e_n} = \frac{n}{\|\phi_{e_n}\|_{\mathrm{op}}}\phi_{e_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ もすべて有界ですが，$\|\psi_{e_n}\|_{\mathrm{op}} = n$ なので一様有界ではありません．ところが任意の $x \in X$ に対して，代数基底の定義から $\{\psi_{e_n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ のうち 0 でないのは有限個であり，従ってとくに $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\psi_{e_n}(x)| < \infty$ です．すると一様有界性原理によって $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\psi_{e_n}\|_{\mathrm{op}} < \infty$ となって，矛盾が導かれました． □

ちょっと何が効いているのかわかりにくい証明ですね（私もわかりません）．とりあえず代数基底の線型結合が有限個に限られていることが，無限次元空間の位相と馴染まない感じだけわかればいいかな，と思います．

第 12 章

開写像定理と値域定理

この章では Baire のカテゴリー定理からいくつかの重要な定理を導きます．粗っぽく言えば，無限次元ノルム空間の間の線型作用素に対して，いつ有限次元と類似の性質が成り立つかという方向の結果です．

有限次元のノルム空間の間の線型写像がどういう性質を持つか，思い出しましょう．まず有限次元ノルム空間上の線型写像は連続でしたから，全単射であれば自動的に逆写像も連続，つまり同相写像にもなります．線型写像が全単射になる状況として，準同型定理を憶えていますか？ $T\colon X \to Y$ を線型写像とすると，

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & \mathrm{Ran}(T) \subset Y \\ {\scriptstyle\sim}\downarrow & \nearrow_{\widetilde{T}} & \\ X/\mathrm{Ker}(T) & & \end{array}$$

における $\widetilde{T}$ は線型同型（全単射）になるというものでした．上に述べたことから，$X/\mathrm{Ker}(T)$ が有限次元なら，それは $\mathrm{Ran}(T)$ と線型同型なだけでなく同相（実際にはノルムが同値）にもなるわけです．

12.1　開写像定理と値域定理の主張

この章で紹介する Baire のカテゴリー定理の応用は，上で述べた有限次元のときのようなことが無限次元空間で成り立つための十分条件を与えるものです．写像が連続とは，開集合の逆像がまた開集合であることでした．従って，逆写像が（存在したとして）連続であるための条件は以下のように述べられます：

定義 12.1.1. 位相空間 X, Y の間の写像 $T\colon X \to Y$ について，X の任意の開集合 G の像 $T(G)$ が Y の開集合であるとき，T は開写像であるという．

以下では T が線型作用素の場合を考えますから，x の像を Tx と書いていたように，集合の像も TG のように括弧なしで書きます．

確認問題 12.1.2. X, Y がノルム空間で $T\colon X \to Y$ が線型写像の場合，T が開写像であることは $TB_X(0,1)$ が原点中心の開球を含むことと同値であることを示せ．

次の定理は，空間が完備で有界線型作用素が全射なら開写像であることを示す基本的な結果です：

定理 12.1.3 (開写像定理)**.** X, Y を Banach 空間とし，線型作用素 $T\colon X \to Y$ が有界かつ全射であるとする．このとき T は開写像である．

開写像の定義の前に述べた通り，次の系は直ちに従います：

系 12.1.4 (値域定理)**.** X, Y を Banach 空間とし，線型作用素 $T\colon X \to Y$ が有界かつ全単射であるとする．このとき T^{-1} は有界である．

しつこいようですが，X, Y が完備でなければ T が連続な線型同型であっても，逆写像 T^{-1} が連続でないことがあり得るということです．

演習問題 12.1.5. そのような例を挙げよ．

12.2　可積分関数の Fourier 係数

開写像定理の証明は長いので，先に応用を見てみます．「関数解析入門」で可積分関数の Fourier 変換に対する Riemann–Lebesgue の定理を紹介しました．可積分関数の Fourier 係数についても全く同じ結果が成り立ちます（証明も同じ）：

$$f \in L^1(-\pi, \pi) \Longrightarrow \lim_{|n|\to\infty} |\widehat{f}(n)| = 0.$$

これは数列空間の言葉を使えば $f \in L^1(-\pi, \pi) \Rightarrow \widehat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$ と書くこともできます．

ここで $f \in L^2(-\pi, \pi) \Leftrightarrow \widehat{f} \in l^2(\mathbb{Z})$ で $f \leftrightarrow \widehat{f}$ は等長同型だったので，

$$\mathcal{F}\colon L^1(-\pi, \pi) \ni f \longmapsto \mathcal{F}f = \widehat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$$

も全単射になっていないかという問題が考えられます．答えは否定的で，開写像定理の応用として示すことができます．

この $\mathcal{F}$ は $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$ なので連続で，さらに $C_{\mathrm{per}}[-\pi, \pi] \to c_0(\mathbb{Z})$ の写像として単射であることは「関数解析入門」で示しました．これと $C_{\mathrm{per}}[-\pi, \pi]$ が $L^1(-\pi, \pi)$ で稠密であることから，$L^1(-\pi, \pi) \to c_0(\mathbb{Z})$ の写像としても単射であることがわかります．背理法で証明するために，この $\mathcal{F}$ が全射であると仮定します．すると $\mathcal{F}$ は Banach 空間の間の全単射な有界線型作用素なので，開写像定理（または値域定理）により逆写像 $\mathcal{F}^{-1}$ も有界です．ところが $(c_0(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty)$ において有界な

$$a_n^{(N)} = \begin{cases} 1, & |n| \leq N, \\ 0, & |n| > N \end{cases}$$

という点列を考えると，$\mathcal{F}^{-1}$ による像は Dirichlet 核 D_N であり，これは前の章で見た通り L^1 で有界ではないので矛盾です．

演習問題 12.2.1. $\mathbb{R}$ 上の Fourier 変換 $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ も全射ではないことを示せ．

12.3 開写像定理の証明

それではいよいよ開写像定理の証明（概要）です．これは予告した通り完全に証明しようとすると長くなるので，詳細は各自の本で確認してください（[増田，定理 4.4] または [黒田，定理 7.30]）．ここでは技術的詳細を省いて，流れが見やすいようにしておきます．目標は

「X の単位球の像 $TB_X(0,1)$ が Y の 0 を中心とする開球を含むこと」

です（開写像の定義の後の Exercise 参照）．

Step 1　まず像の閉包 $\overline{TB_X(0,1)}$ が内点を持つことを示します．全射性の仮定から

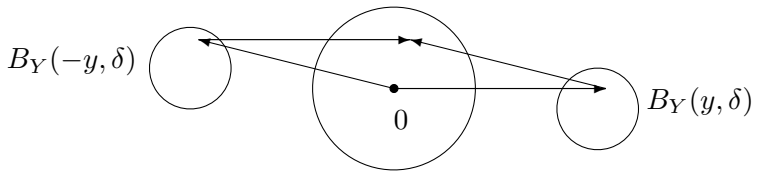
$$Y = TX = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{TB_X(0,n)}$$

であることと，Baire のカテゴリー定理から，ある $\overline{TB_X(0,n)}$ は内点を持ちます．すると T の線型性から $\overline{TB_X(0,1)}$ も内点を持ちます．

Step 2　次に $\overline{TB_X(0,1)}$ が 0 を中心とする開球を含むことを示します．Step 1 の結果から $\overline{TB_X(0,1)}$ はある $B_Y(y,\delta)$ を含み，T の線型性から $B_Y(-y,\delta)$ も含みます．もう一度 T の線型性を使うと，

$$\begin{aligned} B_Y(0,2\delta) &= B_Y(-y,\delta) + B_Y(y,\delta) \\ &\subset \overline{TB_X(0,1)} + \overline{TB_X(0,1)} \\ &\subset \overline{TB_X(0,2)} \end{aligned}$$

がわかります[*1]．半径を 2 から 1 にするのは，再び T の線型性を使ってできます．



最後の Step 3 に入る前に，少し状況の整理をします．Step 2 で全ての $y \in B_Y(0,\delta)$ は $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_X(0,1)$ を使って $Tx_n \to y$ と近似できることが言えました．目標を示すためには，近似ではなく $x \in B_X(0,1)$ を使って $Tx = y$ と書けることが必要です．いま上の $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X で収束するようにとれれば，T は連続なので $Tx_n \to Tx$ となって $Tx = y$ が従います．Step 3 ではそういう点列を上手く選びます．前の二つの step は Baire のカテゴリー定理と，写像の線型性からすぐにわかることでしたが，次は少しアイデアが必要です．

[*1] この最初の等式は $\subset$ で十分で，そうすると開球を開凸近傍にしても成り立ちます．開写像定理は実はノルム空間より一般の位相線型空間に一般化できますが，一つの制約として各点が開凸近傍を持つという「局所凸」という性質が必要になります．その理由はこの Step 2 にあります．

Step 3　最後に閉包を外した $TB_X(0,1)$ が 0 を中心とする開球を含むことを示します．Step 2 の結果と T の線型性から，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\overline{TB_X(0,\epsilon)} \supset B_Y(0,\epsilon\delta) \tag{12.3.1}$$

がわかります．これは Y で小さな元は X で小さな元の像で近似できることを意味します．これを使って $Tx = y$ を満たす x を逐次近似で作りましょう．任意の $y \in B_Y(0,\frac{\delta}{2})$ に対して，上の (12.3.1) で $\epsilon = \frac{1}{2}$ とすることで $z_1 \in TB_X(0,\frac{1}{2})$ を $\|y - Tz_1\|_Y < \frac{\delta}{4}$ を満たすようにとることができます．この $y - Tz_1 \in B_Y(0,\frac{\delta}{4})$ を Tz_2 で近似しようとすれば (12.3.1) を $\epsilon = \frac{1}{4}$ として使えるので，z_2 は $B_X(0,\frac{1}{4})$ からとることができて，$\|y - Tz_1 - Tz_2\|_Y < \frac{\delta}{8}$ とできます．同じ議論を繰り返すことで

$$z_k \in TB_X(0,2^{-k}), \quad \|y - Tz_1 - Tz_2 - \cdots - Tz_k\|_Y < 2^{-k-1}\delta$$

を満たす点列 $(z_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset X$ を作ることができます．この点列のノルムは総和が 1 に収束するので，$x = \sum_{k\in\mathbb{N}} z_k \in B_X(0,1)$ が存在します．さらに T が連続だったことを思い出すと

$$Tx = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} Tz_k = y$$

となって，任意の $y \in B_Y(0,\frac{\delta}{2})$ が $x \in B_X(0,1)$ の像で書けたので証明が終わります．　□

確認問題 12.3.1. 上の証明の概要の中で，完備性を使った箇所を二点指摘せよ．

第 13 章

Banach 空間上のコンパクト作用素

この講義の第 5，6 章は，微分・積分方程式に起源を持つ Hilbert 空間上のコンパクト作用素の性質を調べることにあてました．

定義 13.0.1. Hilbert 空間 $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ からそれ自身への線型作用素 K は，$\mathcal{L}_{\mathrm{f}}(H)$ に属する作用素の列 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して $\|K_n - K\|_{\mathrm{op}} \to 0$ $(n\to\infty)$ となるときにコンパクト作用素という．

そこで注意したように，コンパクト作用素の現代的な定義はこれとは違います．

定義 13.0.2. Banach 空間 $(X, \|\cdot\|)$ からそれ自身への線型作用素 K は，有界集合を相対コンパクトな集合に写すときにコンパクト作用素という．

Hilbert 空間の場合には結局同じであることがわかるのですが，Banach 空間の場合には一致しない場合があります (Enflo, 1973)．

13.1 コンパクト作用素が有限階作用素で近似できる条件

この章では Banach 空間の枠組みで「コンパクト作用素が有限階作用素で近似できるための十分条件」を一つ紹介します．そのために「関数解析入門」で導入した，無限次元空間における基底の変種を思い出しましょう．

定義 13.1.1. 無限次元ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の可算部分集合 $S = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Schauder 基底であるとは，任意の $x \in X$ に対して複素数列 $\{c_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ がただ一つ存在して $\lim_{N\to\infty}\|x - \sum_{n=1}^{N} c_n(x)s_n\| = 0$ となることをいう．

いくつか例を挙げると，$\ell^p(\mathbb{Z})$ $(p \in [1,\infty))$ では $s_n = (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$，可分な Hilbert 空間では完全正規直交系，$L^p[0,1]$ では Haar 関数系（「関数解析入門」第 12 回に紹介），$C[0,1]$ では Haar 関数系を積分したものが，それぞれ Schauder 基底になっています㊟．一方で Schauder 基底を持つ空間は自動的に可分になるので，$\ell^\infty(\mathbb{Z})$ や $L^\infty[0,1]$ は Schauder 基底を持ちません．

Schauder 基底を持つ Banach 空間ではコンパクト作用素が有限階作用素で近似できる，というのがこの章の主定理です．

定理 13.1.2. Banach 空間 $(X, \|\cdot\|)$ は Schauder 基底を持つとし，X からそれ自身への線型作用素 K は有界集合を相対コンパクト集合に写すとする．このとき有界な有限階作用素の列 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\|K - K_n\|_{\mathrm{op}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ となるものが存在する．

Schauder 基底を使って有限次元近似をするには,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)s_k = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)s_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(x)s_k$$

と分解して, 第二項が無視できるという方針で考えるのが自然です．そこで $S_n x = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)s_k, R_n x = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(x)s_k$ と名付けます．この方針をもう少し正確に述べると

$$Kx = S_n Kx + R_n Kx$$

と分解して,

(1) $K_n = S_n K$ が有界な有限階作用素であることを示す.
(2) $\|R_n K\|_{\mathrm{op}}$ が $n \to \infty$ で 0 に収束することを示す.

ということになります．（ちなみに $Kx = KS_n x + KR_n x$ とすると失敗します.）どちらも一見すると簡単そうに見えますが，意外と難しいところがあります．まず S_n, R_n が線型作用素であること自体が，まったく自明というわけではありません.

確認問題 13.1.3. Schauder 基底の展開係数 $x \mapsto c_k(x)$ は線型汎関数であることを示し，それを用いて S_n, R_n が線型作用素であることを示せ.

次に S_n, R_n が有界であることも必要になりますが，それはこれまでに準備した大定理を使うことになります[*1]．まず $S_n x$ は $c_k(x)s_k$ の有限和なので，次の補題から始めましょう.

補題 13.1.4. Schauder 基底の展開係数 $x \mapsto c_k(x)$ は有界線型汎関数である.

Proof. 代数基底の展開係数が有界とは限らないことを思い出すと，この補題の証明が大変であることが想像できると思います．実際，前の章で証明した値域定理を使ったやや大掛かりな証明になります．値域定理を使うことを認めると，$x \mapsto c_k(x)$ をある全射な有界作用素の逆として表すことになりますが，これでは値域が小すぎるので

$$T : x \mapsto (c_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$$

という数列への写像を考えることにします．この線型写像 T の自然な値域は，数列の空間

$$Y = \left\{ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \colon \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_k \text{ が } X \text{ でノルム収束する} \right\}$$

[*1] ちなみに X が可分な Hilbert 空間で Shcauder 基底として完全正規直交系をとったときには，S_n, R_n が直交射影になるという特殊事情で非常に簡単になります.

なので，T を Y から X への写像 $U\colon (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_k$ の逆写像と見ることにします．この U は Y（と Schauder 基底）の定義から全射なので，あとは Y が Banach 空間で U が有界であることを示せば，値域定理から $T = U^{-1}$ も有界となって証明が終わります．

さて，Y にはまだノルムを入れていませんでしたが，その入れ方が実は証明の最大のポイントで

$$\|(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_Y = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k s_k \right\|$$

でノルムを定めます．このとき，まず U の有界性は簡単で，

$$\|U(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_k \right\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k s_k \right\| = \|(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_Y$$

だから $\|U\|_{\mathrm{op}} \le 1$ です．次に Y の完備性を示すために，$(a^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ を $\|\cdot\|_Y$ に関する Cauchy 列，つまり任意の $\varepsilon > 0$ に対して N を十分大きく取れば，すべての $m_1, m_2 \ge N$ に対して

$$\left\| a^{(m_1)} - a^{(m_2)} \right\|_Y = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^{(m_1)} - a_k^{(m_2)} \right) s_k \right\| < \varepsilon$$

とできるとします．このときとくに

$$\begin{aligned} \left\| \left(a_n^{(m_1)} - a_n^{(m_2)} \right) s_n \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^{(m_1)} - a_k^{(m_2)} \right) s_k - \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k^{(m_1)} - a_k^{(m_2)} \right) s_k \right\| \\ &< 2\varepsilon \end{aligned} \tag{13.1.1}$$

となっていることに注意すると，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $(a_n^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{C}$ の Cauchy 列で，したがって各点収束極限として $(a_n^{(\infty)})_{n\in\mathbb{N}}$ が存在します．これが実はノルム $\|\cdot\|_Y$ での収束極限にもなっていることは，不等式 (13.1.1) で $m_2 \to \infty$ とすればわかります㊟．最後に，$(a_n^{(\infty)})_{n\in\mathbb{N}} \in Y$ であることを示すことが残っています．そのためにまず $\sum_{k=1}^{n} a_k^{(m)} s_k \in X$ が n をパラメータとして（収束列なので）Cauchy 列であることに注意します．

これと不等式 (13.1.1) で $m_2 \to \infty$ とした評価を組み合わせれば，n_1, n_2 が十分大きいときに

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{n_1} a_k^{(\infty)} s_k - \sum_{k=1}^{n_2} a_k^{(\infty)} s_k \right\| &\le \left\| \sum_{k=1}^{n_1} a_k^{(m)} s_k - \sum_{k=1}^{n_2} a_k^{(m)} s_k \right\| + 2\varepsilon \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

となって，$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(\infty)} s_k$ が n をパラメータとして Cauchy 列であることがわかります．X は完備と仮定したので，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(\infty)} s_k \in X$，したがって $(a_n^{(\infty)})_{n\in\mathbb{N}} \in Y$ の証明が終わりました． □

長くて大変な証明でしたが，いたるところで $\|\cdot\|_Y$ の定め方がうまく働いています．関数解析の進んだ研究の場面では，このように適切な空間に上手いノルムを入れるアイデアが役立つことは多いようです（私はその道のプロではないので，それほど実感を持ってはいませんが）．

補題 13.1.4 を使って，S_n, R_n の有界性を示します．少し強く，$n \in \mathbb{N}$ について一様有界であることを示しますが，その理由は後で主定理を示すときにわかります．

命題 13.1.5. 定理の仮定のもとで，$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|S_n\|_{\mathrm{op}}<\infty$, $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|R_n\|_{\mathrm{op}}<\infty$.

Proof. まず S_n については，各 $x\in X$ に対して $(S_nx)_{n\in\mathbb{N}}$ が（x に）収束するので，Banach–Steinhaus の定理により $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|S_n\|_{\mathrm{op}}<\infty$ です．一方で R_n については，

$$\|R_nx\|=\|x-S_nx\|\le\|x\|+\|S_nx\|$$

なので，$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|R_n\|_{\mathrm{op}}\le 1+\sup_{n\in\mathbb{N}}\|S_n\|_{\mathrm{op}}<\infty$ です． □

ここでちょっとした注意として，任意の $x\in X$ に対して $R_nx\xrightarrow{n\to\infty}0$ ですが，$\|R_n\|_{\mathrm{op}}\xrightarrow{n\to\infty}0$ とはなりません㊣.

準備が整ったので，主定理の証明をします．最初に予告したように $K=S_nK+R_nK$ と分解します．ここで S_n は有界な線型作用素で，その値域は $\{s_k\}_{k=1}^n$ で生成されるので有限階です．したがって S_nK の部分は有界な有限階作用素になっています．第二項の R_nK については，X の単位球 $B_X(0,1)=\{x\in X\colon\|x\|\le 1\}$ の K による像はコンパクトなので，とくに任意の $\delta>0$ に対して $KB_X(0,1)\subset\bigcup_{j=1}^J B_X(x_j,\delta)$ という有限被覆が存在します．すると任意の $\|x\|=1$ となる x に対して Kx から距離 δ 以内に x_j が見つかるので

$$\begin{aligned}\|R_nKx\|&\le\max_{1\le j\le J}\|R_nx_j\|+\|R_n(Kx-x_j)\|\\&\le\max_{1\le j\le J}\|R_nx_j\|+\delta\sup_{n\in\mathbb{N}}\|R_n\|_{\mathrm{op}}\end{aligned}$$

となります．この第一項は $n\to\infty$ で 0 に収束し，$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|R_n\|_{\mathrm{op}}<\infty$ だったことを思い出すと，$\|R_nK\|_{\mathrm{op}}\xrightarrow{n\to\infty}0$ が従います． □

13.2　いくつかのコメント

上の証明の後半では K のコンパクト性を使って頑張っていますが，それはその前に注意したように $\|R_n\|_{\mathrm{op}}\xrightarrow{n\to\infty}0$ とはならないからです．もし $\|R_n\|_{\mathrm{op}}\xrightarrow{n\to\infty}0$ だったら $\|R_nK\|_{\mathrm{op}}\le\|R_n\|_{\mathrm{op}}\|K\|_{\mathrm{op}}$ でおしまいです.

この章で示した主定理を使うと，Schauder 基底を持つ Banach 空間に対しても第 5 章と概ね同じ方針で Riesz–Schauder の理論が展開できます．興味があれば，岩村，河田，吉田「位相解析の基礎」の §44, §45 を参照してください．ただし Riesz–Schauder の理論自体は，別の方法でまったく一般の Banach 空間上のコンパクト作用素に拡張されています（[黒田]，[増田] 参照）ので，そこを追及する意義は限定的です.

ここでは，どちらかというと値域定理や Banach–Steinhaus の定理といった大定理が，関数解析の理論の中でどう使われるかを紹介するために，コンパクト作用素の二つの定義の同値性という話題を取り上げました.

第 14 章

閉作用素と閉グラフ定理

有限次元ノルム空間上の線型作用素は実はすべて有界です（第 4 章で演習問題にしました）．また，このノートではこれまでずっと有界作用素を扱ってきました．しかし無限次元空間の線型作用素には非有界，従って連続でないものが数多くあります．例えば量子力学における運動量作用素にも現れる $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ は，安直に $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ の写像と見ると有界ではありません．

確認問題 14.0.1. これを示せ．

次の例はとくに重要というわけではありませんが，微分作用素以外にも例があるということで挙げます．

演習問題 14.0.2. 数列空間 $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$ から $\mathbb{C}$ への線型作用素を $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ で定める．この数列空間に ℓ^p ノルムを入れたとき，どの p に対してこの作用素は有界になるか？

ここで挙げた非有界作用素の二つの例は，非有界であるという問題に加えて，いずれもその定義域が Banach 空間になっていません．一様有界性原理や開写像定理で完備性が果たした役割を考えると，これも問題の一端という感じがします．このうち非有界性は，たとえば微分作用素の場合には定義域のノルムを以下のように強めれば解消されます：

$$\|f\|_{1,\infty} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|f\|_\infty + \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right\|_\infty.$$

このとき「関数解析入門」でも触れた通り $C^1[0,1]$ は $\|\cdot\|_{1,\infty}$ について Banach 空間になるので，完備性の問題も同時に解消します．

確認問題 14.0.3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \colon (C^1[0,1], \|\cdot\|_{1,\infty}) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ は有界線型作用素であることを確かめよ．

結局のところ，微分作用素 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ については

$$(C^1[0,1], \|\cdot\|_{1,\infty}) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$$

で考えれば，Banach 空間上の有界線型作用素になりました．

14.1　閉作用素

一般に線型作用素 $T\colon X \to Y$ に対して $\|x\|_T \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ をグラフノルムといい，このノルムについて T は有界です．さらに上のように X が $\|\cdot\|_T$ について Banach 空間であれば，Banach 空間の一般論が全て使えてうれしいのですが，そうなる作用素には名前が付いています．

定義 14.1.1. X, Y を Banach 空間とし，X の部分空間 $\mathcal{D}(T)$ 上で線型作用素 $T\colon \mathcal{D}(T) \to Y$ が定義されているとする．定義域 $\mathcal{D}(T)$ がグラフノルム $\|\cdot\|_T$ で完備であるとき，T を閉作用素という．

閉作用素の以下のような基本的な性質は，各自が本で証明を確認しておいてください：

- T が閉作用素であることは，そのグラフ $\{(x, Tx) \mid x \in \mathcal{D}(T)\}$ が $X \times Y$ で閉集合である[*1]ことと同値．
- X 上の有界作用素は閉作用素．
- 閉作用素と有界作用素の和は閉作用素．
- 閉作用素が単射ならば，その逆も閉作用素．

量子力学において位置作用素として現れる掛け算作用素も基本的です．これは少し一般の設定で述べると，測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の可測関数 m に対して

$$\mathcal{D}(M_m) := \{f \in L^p(\Omega,\mu)\colon mf \in L^q(\Omega,\mu)\} \to L^q(\Omega,\mu)$$

の写像として $M_m f = mf$ で定まる線型作用素です．これが閉作用素になることを確かめてみます．

上のリストの最初の条件「グラフが閉集合なら閉作用素」を使ってみます．すると $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ in L^p かつ $mf_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ in L^q ならば，$f \in \mathcal{D}(M_m)$ かつ $g = mf$ ということを確かめればよいことになります．ここで「関数解析入門」で L^p の完備性を示すときにも使った事実「L^p 収束する関数列は概収束部分列を持つ」を思い出しましょう．すると $f_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} f$ かつ $mf_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} g$ がどちらも概収束として成り立つような $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ をとることができます．この部分列に沿っては，もちろん $mf_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} mf$ でもあるので $g = mf$ となって，さらに g が mf_n の L^q 収束極限であることから $mf = g \in L^q$ もわかるので，$f \in \mathcal{D}(M_m)$ です．□

このように関数空間で極限の一致を示すときに概収束部分列を考えるのは常套手段です．

演習問題 14.1.2. 掛け算作用素 M_m が有界作用素になるための条件を考えよ．

演習問題 14.1.3. X, Y を Banach 空間とし，線型作用素 $T\colon X \to Y$ が

$$\|x_n - x\|_X \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ ならば } Tx_n \text{ は } Tx \text{ に } Y \text{ で弱収束する}$$

という性質を持つとする．このとき T は閉作用素であることを示せ．

[*1] 念のためですが，$x_n \to x$, $Tx_n \to y$ ならば $x \in \mathcal{D}(T)$ で $y = Tx$ ということです．

14.2 閉グラフ定理

閉作用素は，定義域にグラフノルムを入れると Banach 空間上の有界線型作用素になりました．グラフノルムに関して有界になるのは自明ですが，実はノルムを指定しなくても次のような定理が成り立ちます．

定理 14.2.1 (閉グラフ定理)**.** X, Y が Banach 空間で，X 全体で定義された $T\colon X \to Y$ が閉作用素ならば有界である．

これは Banach 空間全体で定義された線型作用素の有界性（$\Leftrightarrow$ 連続性）を示すときに便利な定理です．本来であれば $x_n \to x$ ならば $Tx_n \to Tx$ を示さなくてはいけませんが，閉作用素であることを示せば十分なので，

$$x_n \to x \text{ かつ } Tx_n \text{ が収束するならば } Tx_n \to Tx$$

と追加の仮定をおいて示せばよいことになります．

閉グラフ定理の証明は第 12 章で示した値域定理を使うと，すぐにできます（実は逆に閉グラフ定理から開写像定理も示せるので，同じ程度に深い定理であるということも言えますが）．いつものように概要だけですが，証明の流れを見ます．T が閉作用素なので，$X = \mathcal{D}(T)$ はグラフノルム $\|\cdot\|_T$ で Banach 空間です．一方で仮定から X は $\|\cdot\|_X$ についても Banach 空間でした．いま恒等写像

$$\mathrm{id}\colon (X, \|\cdot\|_T) \to (X, \|\cdot\|_X)$$

を考えると，これは有界作用素で全単射です．従って値域定理により逆写像も有界，つまりある $c > 0$ が存在して任意の $x \in X$ に対して

$$\|\mathrm{id}x\|_T \leq c\|x\|_X.$$

グラフノルムの定義を思い出すと，これから T が有界作用素であることが従います． □

14.3 閉グラフ定理の応用

閉グラフ定理の応用を二つ紹介します．１つ目は次の命題です[*2]．

命題 14.3.1. 線型空間 X に Hausdorff 位相 $\mathcal{O}$ が定まっていて，二つのノルム $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ が，以下の二条件を満たすとする：

(a) どちらのノルムも $\mathcal{O}$ より強い位相を定める，
(b) どちらのノルムも X を完備距離空間にする．

このとき $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ は同値になる[*3]．

[*2] 出典は https://terrytao.wordpress.com/2016/04/22/a-quick-application-of-the-closed-graph-theorem/
[*3] 定義の復習：$\exists c_1, c_2 > 0, \forall x \in X, c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$.

Proof. id を恒等写像とし，ただし異なるノルムを備えた空間 $(X, \|\cdot\|_1)$ から $(X, \|\cdot\|_2)$ への写像と見ます．この写像は閉作用素になります．実際，$(X, \|\cdot\|_1) \times (X, \|\cdot\|_2)$ において，id のグラフ上の点列 (x_n, x_n) が $(x_n, x_n) \xrightarrow{n\to\infty} (x, y)$ と収束するならば

$$x_n \to x \text{ in } \|\cdot\|_1 \quad \text{かつ} \quad x_n \to x \text{ in } \|\cdot\|_2,$$

であり，仮定 (a) と位相 $\mathcal{O}$ が Hausdorff であることから $x = y$ となります．従って極限 $(x, y) = (x, x)$ も id のグラフ上にあり，id は閉作用素です．定義域はもちろん X 全体なので，仮定 (b) と閉グラフ定理から有界，つまり

$$\|x\|_2 = \|\mathrm{id}x\|_2 \le c\|x\|_1$$

です．$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ の役割を入れ替えても同じですから，これらは同値なノルムになります． □

これは何かの役に立つ結果ではありませんが，印象的な結果ではあります．X として関数空間を考えると，大抵は弱収束と同じ考え方で “自然な” 弱い位相を定めることができて，Hausdorff になります．上の命題は，それを拡張して Banach 空間にするようなノルムは本質的に一つしか無いと主張しています．「関数解析入門」では，やや天下り的に Banach 空間の例を挙げましたが，実はノルムの選択にはそんなに自由度はなかったわけです．

もう一つの応用として，いわゆる射影作用素の連続性を示します．ノルム空間 X に二つの部分空間 Y, Z があって，全ての $x \in X$ に対してただ一つ $(y_x, z_x) \in Y \times Z$ が存在して $x = y_x + z_x$ と表せるとき，$X = Y \oplus Z$ と書き，Y と Z は互いの補空間であるといいます．

確認問題 14.3.2. Hilbert 空間 H の閉部分空間 M に対しては，$H = M \oplus M^\perp$ であった．このとき M, $M^\perp$ への直交射影は有界であることを示せ．

Banach 空間 X には直交性の概念はありませんが，もし Y, Z が閉部分空間ならば，$P_1 x = y_x$, $P_2 x = z_x$ で定まる射影作用素は有界になります．これを示すため，$(x_n, P_1 x_n, P_2 x_n) \to (x, y, z)$ とすると，Y, Z は閉なので $y \in Y$, $z \in Z$ ですが，$P_1 x_n + P_2 x_n = x_n \to x$ ですから，$y + z = x$ です．分解の一意性から $y = P_1 x$, $z = P_2 x$ となり，従って $x \mapsto (P_1 x, P_2 x)$ という作用素は閉作用素です．定義域はもちろん X 全体なので，閉グラフ定理が使えて P_1 は有界，P_2 についても同様です． □

閉グラフ定理の二つの応用を見て，ピンとこないという人も多いかもしれません．大定理を使った割には，驚くような結果が出たわけではなく，有限次元空間や Hilbert 空間ではわかっていた[*4]ことが Banach 空間でも確かめられただけです．関数解析の最初の部分では，こういう感覚を持つことは普通のことです．ただ一つ気に留めておくと良いと思うのは，定理や例の条件（とくに完備性）を外すと非常に病的な反例が現れるということです．

Banach 達の功績は無限次元の線型空間という深い森の中で，なんとか普通に歩ける範囲を見出したということだと思います．私たちは最初に「完備性」という答えを教えられているので，探検の楽しみがないわけです．

[*4] 有限次元空間では全てのノルムは同値でした．

14.4 補遺：前閉（可閉）作用素

微分作用素 (例えば $\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$) に代表されるような，作用素の形式が先に与えられている状況では，安全のためにとりあえず C^∞ のような狭い定義域から出発することがあります.

しかし作用素の定義域がグラフノルムで完備であるためには「安全な定義域」では小さすぎる場合があります．このようなときには，定義域を広げて閉作用素にできるかということが問題になります.

定義 14.4.1. ノルム空間 X で定義された線型作用素 T に対して，X を含むノルム空間 $\widetilde{X}$ とその上の閉作用素 $\widetilde{T}$ で $\widetilde{T}|_X = T$ となるものが存在するとき，T は前閉（または可閉）であるという.

作用素の前閉（可閉）性の抽象的な十分条件は [黒田，定理 7.20], [増田，定理 3.7] を見てください．上で触れた微分作用素の場合は，大抵はもっと具体的に Sobolev 空間と呼ばれるものが「良い定義域」であることがわかります.

第 15 章

リゾルベントとスペクトル

線型代数の理論の一つの到達点は，線型写像（行列）の固有値，固有ベクトルによる表現でした．第 6 章では，無限次元 Hilbert 空間でも作用素がコンパクトで自己共役作用素の場合には対角化の一般化がそのままできることを示しましたが，この章ではもっと一般の場合を扱います．

まず固有方程式にあたる $Ax = \lambda x$ が意味を持つのは，A の定義域と値域が同じノルム空間にあるときに限ることに注意しましょう．そこでこの章では A はある Banach 空間 X の部分空間 $\mathcal{D}(A)$ から X への線型作用素とします．さらに応用上ほとんどいつも閉作用素を考えるので，ここでは A は閉作用素と仮定して進めます．

15.1　リゾルベントとスペクトル

線型代数において，λ が固有値でないということは $Ax = \lambda x$ の解が 0 に限るということで，つまり $\lambda - A$ が単射ということでした．ここで有限次元の場合は準同型定理から $\lambda - A$ は全射にもなるのですが，無限次元の場合はそうとは限りません．このことは $C[0,1]$ 上で $Af(x) = \int_0^x f(t)dt$ で定まる作用素を考えればわかります．従って λ が固有値でないことの一般化には単射に加えて全射を仮定するか選択の余地が生じますが，通常は全射も仮定して次のように定めます：

定義 15.1.1. $\lambda - A$ が $\mathcal{D}(A) \to X$ の全単射である $\lambda \in \mathbb{C}$ の全体をリゾルベント集合といい $\rho(A)$ と書く．また $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ をスペクトル集合という[*1]．

$\lambda \in \rho(A)$ とすると $(\lambda - A)^{-1}$ が存在して，これを λ-リゾルベント（作用素）といいます．いま A は閉作用素と仮定していて，λ を掛ける操作は有界作用素なので $\lambda - A$ も閉作用素です．従って第 14.1 節で触れたように $(\lambda - A)^{-1}$ も閉作用素になります．ここで上の定義で全射を仮定したので $(\lambda - A)^{-1}$ は X 全体で定義されており，従って閉グラフ定理から有界作用素になります．

リゾルベントの定義で全射を仮定したおかげで $(\lambda - A)^{-1}$ が X 上の有界作用素となりましたが，一方で都合の悪いものは全てスペクトルに押し込めたわけで，このせいで固有値以外のものがいろいろ入ってきます．まず $\lambda \in \sigma(A)$ が固有値になるのは，$Ax = \lambda x$ が 0 でない解を持つとき，つまり $\lambda - A$ が単射

[*1] 念のためですが，$\sigma(A)$ の方が固有値の一般化です．

でないときです．このような λ を点スペクトルということもあり，次のように書きます：

$$\sigma_{\mathrm{p}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Ker}(\lambda - A) \neq \{0\}\}.$$

次に $\lambda - A$ が単射であるものの，全射ではない場合を考えるのですが，これはさらに連続スペクトル，剰余スペクトルの二通りに分けます：

$$\sigma_{\mathrm{c}}(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \rho(A) \;\middle|\; \mathrm{Ker}(\lambda - A) = \{0\}, \overline{\mathrm{Ran}(\lambda - A)} = X\right\},$$
$$\sigma_{\mathrm{r}}(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \rho(A) \;\middle|\; \mathrm{Ker}(\lambda - A) = \{0\}, \overline{\mathrm{Ran}(\lambda - A)} \neq X\right\}.$$

この分類の意味などにはこの講義では踏み込みません．

スペクトルには固有値でないものが含まれますが，その少なくとも一部は「近似的に固有値」であるようなものです．

命題 15.1.2. X を Banach 空間，A は $\mathcal{D}(A) \subset X$ から X への閉作用素とする．このとき $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ で，$\|x_n\|_X = 1$ かつ $\lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda)x_n\|_X = 0$ となるものが存在するならば $\lambda \in \sigma(A)$ である．

Proof. これは簡単で，まず $\lambda - A$ が単射でないなら $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ です．一方で $\lambda - A$ が単射なら，上の状況で $(A-\lambda)x_n \neq 0$ なので

$$\frac{\|x_n\|_X}{\|(A-\lambda)x_n\|_X} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

となって，$(\lambda - A)^{-1}$ は有界ではなく，従って $\lambda \in \sigma(A)$ です． □

演習問題 15.1.3. 上の命題の仮定は $\lambda \in \sigma(A)$ の必要条件ではないことを示せ．

15.2　Fourier 変換を使って $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ のスペクトルを調べる

点スペクトルの定義は自然に見えますが，一つ注意があります．$Ax = \lambda x$ が解を持つということは，$x \in \mathcal{D}(A) \subset X$ であってこの方程式を満たすものがあるということです．抽象的に書いていると当たり前にしか見えませんが，具体的な作用素を相手にしていると意外と混乱しやすいところです．

例えば $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ を $\mathcal{D}(A) = H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ で考えてみましょう[*2]．すると任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$$

ですから，固有方程式は解を持つように見えます．しかしここで $\mathcal{D}(A) \subset L^2(\mathbb{R})$ の中で解を見つけないといけなかったことを思い出すと，$e^{\lambda x}$ はどの $\lambda \in \mathbb{C}$ に対しても $L^2(\mathbb{R})$ に属さないので，λ は点スペクトルではありません．

では A のスペクトルは何でしょう？点スペクトルは存在しないことがわかっているので，リゾルベント，連続スペクトル，剰余スペクトルの同定が問題ですが，これらはいずれも $\lambda - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ の値域や逆の有界

[*2] $H^1(\mathbb{R}) = \{f\colon f, f' \in L^2(\mathbb{R})\}$ と思って下さい．この章では閉作用素に限っているので，$\mathcal{D}(A)$ は十分広くとる必要があって，とくに $C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$ などにとることはできません．

性に関わっていて，直接には難しい問題です．例えば全射性は「任意の $g \in L^2(\mathbb{R})$ に対して $\lambda f - f' = g$ が自乗可積分な解を持つか？」，逆の有界性は「$\lambda f - f' = g$ の自乗可積分な解が g について連続か？」と，それぞれ微分方程式の解の存在と安定性の問題です．しかしいまは $L^2(\mathbb{R})$ で考えているおかげで，Fourier 変換

$$\mathcal{F}\colon L^2(\mathrm{d}x) \to L^2(\mathrm{d}\xi)$$

を使って問題を簡単にすることができます．$\mathcal{F}$ は等長同型であることを「関数解析入門」で学びました．さらに $f \in L^2(\mathrm{d}x)$ がしかるべき意味で微分可能なら $\mathcal{F}(f')(\xi) = -\sqrt{-1}\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$ と微分は掛け算に変わるのでした．これは実は $f \in H^1(\mathbb{R})$ なら OK です．

従って $A = \mathcal{F}^{-1}(-\sqrt{-1}\xi)\mathcal{F}$ によって A を Fourier 空間 $L^2(\mathrm{d}\xi)$ 上の掛け算作用素 $\widehat{A} = -\sqrt{-1}\xi$ と同一視することができます[*3]．この掛け算作用素の定義域は $H^1(\mathbb{R})$ の $\mathcal{F}$ による像で

$$\mathcal{D}(\widehat{A}) = \left\{ f \in L^2(\mathrm{d}\xi) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)|f(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi < \infty \right\}$$

となり，これにより $\widehat{A}$ は閉作用素になります．この変換を使って，まず純虚数でない $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sqrt{-1}\mathbb{R}$ はリゾルベント集合に属することを示しましょう．$\lambda - \widehat{A}$ は掛け算作用素なので，任意の $f \in L^2(\mathrm{d}\xi)$ に対して安直に $\frac{1}{\lambda+\sqrt{-1}\xi} f(\xi)$ とおけば $\lambda - \widehat{A}$ で f に戻って全射性が言えそうです．確認すべきことは

確認問題 15.2.1. 上の設定で $\frac{1}{\lambda+\sqrt{-1}\xi} f(\xi)$ は $\mathcal{D}(\widehat{A})$ に属することを示せ．

次に純虚数 $\lambda \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$ はスペクトル集合に属することを示しましょう．このとき関数 $\frac{1}{\lambda+\sqrt{-1}\xi}$ は $\mathbb{R}$ 上で特異点を持つので，その掛け算と対応しそうな $(\lambda - \widehat{A})^{-1}$ が非有界になることは想像がつくと思いますが，ここでは前に紹介した命題 15.1.2 を使ってみます．そのために $f_n(\xi) = \sqrt{n}1_{[\sqrt{-1}\lambda, \sqrt{-1}\lambda+\frac{1}{n}]}(\xi)$ とおきます．これは明らかに $\|f_n\|_{L^2} = 1$ を満たし，またコンパクト台を持つので $\mathcal{D}(\widehat{A})$ に属しますが，

$$\begin{aligned}\|(\lambda - \widehat{A})f_n\|_{L^2}^2 &= \int_{[\sqrt{-1}\lambda, \sqrt{-1}\lambda+\frac{1}{n}]} |\sqrt{n}(\lambda + \sqrt{-1}\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \\ &\leq \sup\left\{ (\lambda + \sqrt{-1}\xi)^2 \;\middle|\; \xi \in \left[\sqrt{-1}\lambda, \sqrt{-1}\lambda + \tfrac{1}{n}\right] \right\}\end{aligned}$$

の右辺は $n \to \infty$ で 0 に収束するので命題 15.1.2 の条件が確かめられました．従って前の $\rho(\widehat{A}) \supset \mathbb{C} \setminus \sqrt{-1}\mathbb{R}$ とあわせて，$\sigma(A) = \sigma(\widehat{A}) = \sqrt{-1}\mathbb{R}$ がわかりました．

最後に $\sigma(\widehat{A}) = \sqrt{-1}\mathbb{R}$ が連続スペクトルであることを示しましょう．点スペクトルはないので，示すべきことは剰余スペクトルがないこと，つまり任意の $\lambda \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$ に対して $\mathrm{Ran}(\lambda - \widehat{A})$ が $L^2(\mathrm{d}\xi)$ で稠密であることです．発想は単純で，虚軸から少しでもずれるとリゾルベントなので任意の $\varepsilon > 0$ に対して $(\lambda - \widehat{A} + \varepsilon)^{-1}\colon L^2(\mathrm{d}\xi) \to \mathcal{D}(\widehat{A})$ が存在して全射であるということです．このことから任意の $f \in L^2(\mathrm{d}\xi)$ に対して，

$$(\lambda - \widehat{A})(\lambda - \widehat{A} + \varepsilon)^{-1} f(\xi) = \frac{\lambda + \sqrt{-1}\xi}{\lambda + \sqrt{-1}\xi + \varepsilon} f(\xi)$$

と $\mathrm{Ran}(\lambda - \widehat{A})$ に属する関数が作れて，これは $|\frac{\lambda+\sqrt{-1}\xi}{\lambda+\sqrt{-1}\xi+\varepsilon}| \leq 1$ なので $\varepsilon \to 0$ で f に L^2 収束します．従って $\overline{\mathrm{Ran}(\lambda - \widehat{A})} = L^2(\mathrm{d}\xi)$ です．

[*3] 掛け算作用素をその変数を明示して $(-\sqrt{-1}\xi)$ と書くのはいろいろと問題があるのですが，この例だけのために記号を準備するのも鬱陶しいので許してください．

確認問題 15.2.2. 上の L^2 収束を確かめよ.

15.3　スペクトル表現定理と展望

L^2 上の一階微分を調べるのには Fourier 変換が有効に働きましたが，実はこれはスペクトル表現定理と呼ばれる対角化の一般化の例になっています．実際行列の対角化とは適当な正則行列 U を使って $U^{-1}AU$ を対角行列にするということで，対角行列は固有ベクトル方向ごとには定数倍するという作用に対応するのでした．いま $\mathcal{F}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathcal{F}^{-1} = -\sqrt{-1}\xi$ の変換は，微分を「$f \in L^2(\mathrm{d}\xi)$ を ξ 座標ごとには $-\sqrt{-1}\xi$ 倍する」という作用に変換しているわけで，ちょうど対角化と対応しています[*4]．ここでの議論では（暗に）$(\lambda - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^{-1}$ が $\frac{1}{\lambda+\sqrt{-1}\xi}$ の掛け算に対応することも使いましたが，対角化可能な行列と同様により一般の f に対して $f(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}) = \mathcal{F}^{-1}f(\xi)\mathcal{F}$ を考えることもできます ($(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^{1/3}$, $\exp\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\}$ など).

なお代数的な意味での固有方程式は任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して解を持つのに，スペクトル表現では純虚数 $= \sigma(A)$ の掛け算だけで $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ が表現できていることも注目すべき点で，このあたりも有限次元と無限次元の際立った違いと言えます.

最後に一つだけ手を動かすための問題を挙げておきます.

演習問題 15.3.1. $\ell^2(\mathbb{N} \to \mathbb{C})$ 上の以下の二つの作用素のスペクトルを決定せよ：

$$S(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots),\ T(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, a_4, \ldots)$$

この講義ではスペクトルについて，その定義の背景を理解することや，先にあるスペクトル表現定理との関連を見ることに重点を置きました．一方で一般論や例についてはこれではまったく不足していますので，参考書などで各自補ってください.

スペクトル表現定理やその前段階のスペクトル分解定理がどのような作用素に対して成り立つかといった内容は，実は量子力学の数学的定式化と密接に関係しており，歴史的には関数解析の理論発展の原動力となった問題です．そこまで進むと達成感もありますので，ぜひ各自で学びを深めてもらいたいと思います.

[*4] ただし L^2 関数の ξ での値には意味がないので，これは標語的な意味に過ぎません.