集合入門演習講義ノート（補足説明と問題）

坂井公（筑波大学 数理物質系 数学域）

2012 年度 1–2 学期

目 次

1 論理と記号

日本語や英語のように自然発生的に生まれ，人間が通常のコミュニケーションに用いている言語を自然言語という。一方，プログラミング言語のように，コンピュータに命令を伝えるというような特殊な目的を設計された言語を人口言語という。数学を語るための言語も，基本は英語や日本語などの自然言語だが，自然言語では曖昧になったりひどく長くなったりする内容を表現するために，人工的なさまざまな記法を援用する。

数学の記法は，各分野に特有のものがあり，網羅することはできないが，本節では，比較的共通かつ頻繁に用いられる記法について述べる。また，特徴的な論理法則について概説する。

1.1 特殊な文字と記号

数学でよく使う記号には，まずローマ字（の斜体）とギリシャ文字がある。a_1，B'，α_n などのように，それに添え字やダッシュ（$'$）がつくこともある。これらは，大概，その分野が対象としている「もの」（数論ならば整数や有理数，線形代数ならベクトルや行列，微積分ならば実数や実関数など）を表す変数として用いられ，表す「もの」の種類によって，使う文字種やフォントを使い分けることが多い。これらの文字は，ある種類のものを一般的に表すために用いられ，特定のものを指すには特殊な記号が用意されることが多いが，たとえば虚数単位 $i = \sqrt{-1}$，自然対数の底 e (≈ 2.718)，円周率 π (≈ 3.14) などのように，普通のローマ字やギリシャ文字で特定のものを表すこともある。

念のためギリシャ文字とその読みの一覧を次ページ（図 1）に与える。読みは，日本語で通常行われているものだが，他の読みをすることもある。文字が括弧に入っている場合は，ローマ字に同じ字形のものがあるので，数学では通常用いられない。小文字が 2 つ書いてある場合，後者は筆記体と考えればよいが，区別して用いる場合があるかもしれない。

本講義ノートを通じて記号 $\mathbb{N}$ で自然数全体の集合を表す。日本の初等教育では，0 は自然数の仲間に入れないことになっている。この点は，数学書によって見解が分かれるが，本講義ノートでは 0 は $\mathbb{N}$ の要素だとする。$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ で，それぞれ，整数，有理数，実数，複素数の全体を表す。また記号 $\in$ で集合の要素であることを表す。例えば $\phi \in \mathbb{N}$ は,「 ϕ が自然数である」ということを表す。

1.2 論理記号と論理式

数式は,「もの」を表す変数を用い，その分野で約束された記法により，さまざまに書くことになるが，特に（変数の値が指定されれば）真か偽かどちらかになる内容を表す式を**論理式**（formula, logical formula） と呼ぶ。たとえば $x + y = 0$，$x^2 > y$ などが論理式だが，これらはこれ以上小さい論理式には分解できないので特に**素論理式**（atomic formula）と呼ぶ。素論理式にどういうものがあるかは，各分野に特有なので，これ以上は述べないが，素論理式を**論理記号**（logical connective）$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$ を用いて何重にも組み合わせることで，複雑な論理式を形成することができる。これらの論理記号は，次の左のような形で用い，意味は右の通りである。

$\neg A$	A でない
$A \wedge B$	A でありかつ B である
$A \vee B$	A であるかまたは B である
$A \rightarrow B$	A であれば B である
$A \leftrightarrow B$	A である時かつその時に限り B である
$\forall x\ A$	任意の x について A である
$\exists x\ A$	ある x について A である

読み	大文字	小文字
アルファ	(A)	α
ベータ	(B)	β
ガンマ	Γ	γ
デルタ	Δ	δ
イプシロン	(E)	ϵ, ε
ゼータ, ツェータ	(Z)	ζ
イータ，エータ	(H)	η
シータ，テータ	Θ	θ, ϑ
イオタ	(I)	ι
カッパ	(K)	κ
ラムダ	Λ	λ
ミュー	(M)	μ
ニュー	(N)	ν
グザイ，クシー	Ξ	ξ
オミクロン	(O)	(o)
パイ	Π	π, ϖ
ロー	(P)	ρ, ϱ
シグマ	Σ	σ, ς
タウ	(T)	τ
ウプシロン	Υ	υ
ファイ，フィー	Φ	ϕ, φ
カイ	(X)	χ
プサイ，プシー	Ψ	ψ
オメガ	Ω	ω

図 1: ギリシャ文字一覧

ここで A や B はそれ自身が論理式である。

$A \to B$ の真偽は，A が真の場合には疑問の余地はないが，A が偽の場合にどうなるかは，やや判断が下しにくい。$A \to B$ という主張は，A が偽の場合には何も述べていないというのが，直感に合致する判断ではあるが，変数の値がすべて決まっても真偽が決まらない式があると，数学的議論を進める上で障害になる場合があるので，A が偽の場合にも $A \to B$ の真偽は定めておきたい。

そこで，数学の論理では，A が偽の場合には，B の内容にかかわらず $A \to B$ は真だと決める。例えば $0 = 1 \to x > 3$ という論理式は，x の値に無関係に真である。いくぶん，御都合主義的な印象はぬぐえないが，これで困ることは何もない。

日常語でたとえば「雨が降れば，運動会は中止だ」などという場合,「雨が降らなければ，運動会は中止しない」という裏の意味を含意することが多いが，これは，特に何も問題がなければ運動会は中止しないということが前提になっているせいであり，言葉自体にそのような意味は含まれていない。数学の論理ではこのような言外の前提は排除することが建前になっているので，この種の日常語との用法の差は注意しておくべきことであろう。

普通の数学では，記号 $\forall n$ や $\exists x$ などを使う際には，それに伴う変数 n や x が走る範囲が定まってい

る。それを例えば

$$\forall n \in \mathbb{N}\ A, \qquad \exists x \in \mathbb{R}\ B$$

などと書いて，それぞれ「任意の自然数 n について A である」,「ある実数 x について B である」という意味を表すことにする。それぞれ

$$\forall n\ (n \in \mathbb{N} \to A), \qquad \exists x\ (x \in \mathbb{R} \land B)$$

の略記と考えてもいい。

一般に論理式は，論理記号で組み合わせた式を入れ子にして書くが，意味が曖昧にならないように括弧を用いる。ただし，式が複雑になるのを防ぐために，$\forall, \exists, \neg, \land, \lor, \to, \leftrightarrow$ はこの順で結合力が強いものとし，$\land, \lor, \to, \leftrightarrow$ はすべて右に先に結合するものとして，不要な括弧を省くことがある。例えば,

$$\forall x\ A \lor \exists y\ \neg B \land C \to D \to E$$

は,

$$((\forall x\ A) \lor ((\exists y\ \neg B) \land C)) \to (D \to E)$$

と同じだ。

$\forall x \in X\ \forall y \in X\ \forall s \in S\ \cdots$ のように $\forall$ ばかり連続して表れる式は $\forall x, y \in X, s \in S\ \cdots$ のように略記される。$\exists$ ばかり連続して表れる式も同様だ。さらに通常の数学で用いられる略記はそのまま使用される。例えば，$n \neq m$ は $\neg(n = m)$ の略記，$x < y < z$ は $x < y \land y < z$ の略記である。

問題 1.1. $a_0, a_1, a_2, \ldots$ を実数の列とする。次の論理式を省略なしで書け。

(a) $a_0, a_1, a_2, \ldots$ は収束する:
$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \epsilon \in \mathbb{R}\ (\epsilon > 0 \to \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n > n_0 \to |a_n - a| < \epsilon))$

(b) $a_0, a_1, a_2, \ldots$ は Cauchy の基本列（または単に Cauchy 列）である:
$\forall \epsilon \in \mathbb{R}\ (\epsilon > 0 \to \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}\ (n > n_0 \land m > n_0 \to |a_n - a_m| < \epsilon))$

(c) $a_0, a_1, a_2, \ldots$ は集積点を持つ:
$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \epsilon \in \mathbb{R}\ (\epsilon > 0 \to \exists n \in \mathbb{N}\ 0 < |a_n - a| < \epsilon)$

問題 1.2. 次の命題を論理式を用いて厳密に表記せよ。

(a) 実数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ は $-\infty$ に発散する。
(b) 実数の集合 A は上に有界である。
(c) 実数 a は，実数の集合 A の上限である。（i.e. $\sup A = a$）
(d) 実数から実数へ関数 f は，$a \in \mathbb{R}$ において連続である。

問題 1.3. 次の命題を論理式を用いて厳密に表記せよ。

(a) ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ は一次独立である。
(b) ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である。
(c) $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 f は線形写像である。

論理式に現れる変数は，特定の「もの」を指すわけではないので，それに何を代入するかにより，普通，論理式の真偽は変動する。例えば $0 \leq x$ は，x が 0 や 100 なら真だが，-1 であれば偽になる。それに対し，式 $\forall x\ A$ の場合，論理式 A 内の x にどんな値を代入しても A が真になるということだ。反対に，式 $\exists x\ A$ の場合，論理式 A を真にするような x の値が存在するということだ。ここで，重要なのは，このような変数 x は，**束縛変数**（bound variable）と呼ばれ「もの」が総体としてどうふるまうか

を表現するために用いられるということだ。例えば，式 $\forall x \in \mathbb{N}\ 0 \le x$ は，個々の自然数が 0 以上かを問題にしているのではなく，自然数がすべて 0 以上かどうかを問題にしている。従って，式 $\forall x \in \mathbb{N}\ 0 \le x$ は，x に影響されることなく値が確定しており，その値は真である。式 $\forall x \in \mathbb{Z}\ 0 \le x$ も同様だが，x の走る範囲が違うのでこちらは値が偽になる。

分野にもよるが，数学で使われる束縛変数は $\forall$ や $\exists$ に伴うもの以外にもある。例えば，総和 $\sum_{i=1}^{n} i^2$ の i や定積分 $\int_0^a x^2 dx$ の x も束縛変数だ。i は 1 以上 n 以下の整数全体を代表し，x は 0 以上 a 以下の実数全体を代表する。

束縛変数以外の変数を**自由変数**（free variable）と呼ぶ。自由変数は,「もの」の（総体ではなく）不特定の一つを代表する目的で用いられる。従って，自由変数に何を代入するかにより，式全体の値が当然影響される。例えば，式 $\forall x \in \mathbb{N}\ y \le x$ の場合，x は束縛変数だが y は自由変数であり，y が -100 や 0 なら式の値は真だが，y が 1 なら偽となる。また，総和 $\sum_{i=1}^{n} i^2$ の n や定積分 $\int_0^a x^2 dx$ の a も自由変数だ。それぞれ，式の値は $n(n+1)(2n+1)/6$，$a^3/3$ となり，n や a の値に依存する。

特に論理式が x を自由変数に持つとき，その論理式を x に関する**述語**（predicate） とか **条件**（condition） と呼ぶ。自由変数を持たない論理式は，**閉論理式**（closed formula）とか **命題**（proposition）などと呼ばれ，真偽がいずれかに確定している。

式 $\forall x\ A$ と $\exists x\ A$ において，A の部分を $\forall$ や $\exists$ の**有効範囲**（scope）と呼ぶ。$\forall$ や $\exists$ が入れ子になっている式において有効範囲を正しく理解することはとても重要である。たとえば,「Every man loves a woman」という英文は，男の集合を M，女の集合を W，x が y を愛するという関係を $L(x,y)$ として，論理式で表現すると,「$\forall x \in M\ \exists y \in W\ L(x,y)$」と「$\exists y \in W\ \forall x \in M\ L(x,y)$」の 2 通りが考えられる。前者の場合，$\forall$ の有効範囲は $\exists y \in W\ L(x,y)$ だ。この部分式 $\exists y \in M\ L(x,y)$ の意味は,「x には愛する女（y）がいる」なので，それに $\forall x \in M$ をかぶせた $\forall x \in M\ \exists y \in W\ L(x,y)$ は「どの男（x）にも，愛する女がいる」という意味になる。一方，後者の場合，$\exists$ の有効範囲は,「どの男も y を愛する」という意味の $\forall x \in M\ L(x,y)$ だ。よって，それに $\exists y \in W$ をかぶせた $\exists y \in W\ \forall x \in M\ L(x,y)$ は,「どの男からも愛される（幸せな）女（y）がいる」と意味になる。英文からは，どちらの意味であるかは判定できない。

もう少し数学的な例を与えよう。「$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ x < y$」は,「どんな整数（$x$）にも，それより大きい整数（$y$）がある」という意味であり，$x+1$ が x より大きいから，もちろん正しい。一方，有効範囲を変えた「$\exists y \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{Z}\ x < y$」は「ある整数（$y$）があって，それはどんな整数（$x$）よりも大きい」という意味であり，正しくない。これを，英語で「Every integer is less than an integer」と表現すると上のどちらの意味だか分からない。日本語で「どの整数もある整数より小さい」という場合は，前者の意味で使うことが多そうだが，やはり後者の意味でないとは言い切れない。

このように自然言語では意味の曖昧な文ができてしまうことがしばしばあるが，論理式を使うことで，曖昧さを除いた厳密な議論ができる。

問題 1.4. 数学における「一様」という言葉は，しばしば有効範囲の違いを表現する。f を実数から実数への関数とし，束縛変数の有効範囲に注意して，f に関する次の述語を論理式として表記せよ。

(a) f は（いたるところ）連続である。
(b) f は一様連続である。
(c) 関数列 $f_1, f_2, \ldots,$ は,（各点で）f に収束する。
(d) 関数列 $f_1, f_2, \ldots,$ は，f に一様収束する。

存在記号 $\exists$ と全称記号 $\forall$ も，安易に日常語と対応させると，有効範囲の問題も絡んで誤用のもとになるので注意したい。たとえば日常語で「ある x が P を満たすなら Q である」というような場合，Q が x に依存しない命題であれば，普通，$\exists x\ P \to Q$ と意味と考えてよいが，Q が x に関する条件であるような場合，その意味は $\forall x\ (P \to Q)$ であることが多い。

問題 1.5. 自然数 n に関する次の日本語の条件文を論理式に変換せよ。

(a) ある自然数 m が n を割り切るならば，n は素数でない。
(b) ある自然数 m が n を割り切るならば，その整数 m は n 以下である。

ただし，m が n を割り切る，n が素数である，m が n 以下であるということは，論理式ではそれぞれ $m \mid n$，$\mathrm{prime}(m)$，$m \leqq n$ と表現せよ。

記号 $\iff$ を両辺の論理式が述語として同値，すなわち，自由変数に何を代入しても常に真偽が同じになるという意味で用いる。また，$A \Longrightarrow B$ は，自由変数に何を代入しても A が真なら B も真だということをあらわす。従って，$A \iff B$ は，$A \Longrightarrow B$ かつ $B \Longrightarrow A$ と同義である。$A \Longrightarrow B$ のとき，A は B の**十分条件**（sufficient condition）だと言い，反対に B は A の**必要条件**（necessary condition）だと言う。$A \iff B$ のとき，A と B は互いに**必要十分条件**（necessary sufficient condtion）だと言う。

論理式 A, B の自由変数が $x_1, x_2, \ldots, x_n$ だけなら，$A \iff B$ は，$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n\ (A \leftrightarrow B)$ が真だということに他ならないし，$A \Longrightarrow B$ は，$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n\ (A \to B)$ が真だということに他ならない。

一般に否定については次の性質（ド・モルガンの法則）がある。

- $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B(\iff A \to \neg B \iff B \to \neg A)$
- $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$
- $\neg(A \to B) \iff A \wedge \neg B$
- $\neg \forall x \in X\ A \iff \exists x \in X\ \neg A$
- $\neg \exists x \in X\ A \iff \forall x \in X\ \neg A$

問題 1.6. ド・モルガンの法則を利用して，問題 1.1 の 3 つの論理式の否定を書き下せ。また，問題 1.2 の 4 つの論理式，問題 1.4 の 4 つの論理式の否定を書き下せ。

ド・モルガンの法則のように純論理的な法則は，自由変数の動く範囲をまったく限定せずに使えるが，数学的な内容を表す論理式の自由変数は，その動く範囲が定まっていることが多く，必要性，十分性を議論する場合も，自由変数の範囲を限定して考えなければならないことが普通である。

問題 1.7. 問題 1.1 の 3 つの論理式は，どれも実数の列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ に関する条件である。各条件は，互いに他の必要条件になっているか？なっている場合，それを証明せよ。そうでない場合，反例を示せ。

問題 1.8. 問題 1.4 の実数値関数 f に関する条件「（いたるところ）連続」と「一様連続」,「（各点での）収束」と「一様収束」は，一方が他方の必要条件となっているか？

問題 1.9. $fx = 2x$ なる関数 f は連続か？ また，一様連続か？$fx = x^2$ の場合どうか？

問題 1.10. 自然数 n, m についての次の述語や命題を算術演算子 $+, -, /, \times$ と $=$ のみを用いた論理式で定義せよ。ただし，先に定義した述語を後で用いるのはかまわない。

(a) $n \mid m$ …… n は m の約数である。
(b) $n > m$ …… n は m より大きい。
(c) prime n …… n は素数である。（ 1 は素数ではないことに注意）
(d) Goldbach の予想……4 以上のすべての偶数は 2 つの素数の和に書き表せる
(e) 素数は無限個存在する。（ヒント: これはどんな数よりも大きい素数があるというのと同じことだ）
(f) 0 以外の自然数は，約数を有限個しか持たない。

1.3 Iverson の記法

ここで，Kenneth Iverson が文献 [2] で導入した記法について説明する。P を任意の論理式とするとき，記法 $[P]$ で 0 か 1 の値を表す。値は

$$[P] = \begin{cases} 1 & P\ \text{が真のとき} \\ 0 & P\ \text{が偽のとき} \end{cases}$$

で定まる。この記法は，あまり広く知られていないようだが，数学で扱う多くの概念を簡潔に表現できる。たとえば，単位行列 I_n とは，i, j-成分が $[i = j]$ なる n-次正方行列だ。また，x の符合

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0\ \text{のとき} \\ 0 & x = 0\ \text{のとき} \\ -1 & x < 0\ \text{のとき} \end{cases}$$

は，この記法を使えば $\operatorname{sgn} x = [x > 0] - [x < 0]$ と定義できる。さらに，

$$[xy > 0] = [x > 0][y > 0] + [x < 0][y < 0], \quad [xy < 0] = [x > 0][y < 0] + [x < 0][y > 0]$$

が成り立つことに注意すれば，$\operatorname{sgn}(xy) = (\operatorname{sgn} x)(\operatorname{sgn} y)$ が機械的な式変形だけで証明できる。この例は，場合分けによる証明に比べ，特にすぐれているわけではないが，本講義ノートで扱うことがらが，Iverson の記法の採用により大幅に単純化できることがある。

例 1.11. 正の整数 n が**完全数**（perfect number）であるとは，

$$2n = \sum_{q \in \mathbb{N}} [q \mid n] q$$

を満たすことと定義できる。一見すると，右辺は，無限個の要素の総和をとっており，ちゃんと定義されないかに見えるが，$[q \mid n]$ が有限個の q の場合を除いて全て 0 になるので，ある確定値を持つ。上は

$$n = \sum_{q \in \mathbb{N}} [q \mid n][q < n] q$$

と同値であることを示せ。これらの定義により，6 と 28 がそれぞれ完全数であることを確認せよ。また正の整数 m と n が互いに**親和数**（または**友愛数**, amicable number）であるとは

$$m + n = \sum_{q \in \mathbb{N}} [q \mid n] q = \sum_{q \in \mathbb{N}} [q \mid m] q$$

を満たすことと定義できる。220 と 284 が互いに親和数であることを確認せよ。

古い数学書では，x が実数のとき，$[x]$ を x を超えない最大の整数を表すことが多い。これは Gauss が発明した記法だが，近年はその目的には，やはり Iverson が発明した記法で $\lfloor x \rfloor$ を使うことが多くなっており，本講義ノートでもそれに従う。例えば，

$$\lfloor \pi \rfloor = 3, \quad \lfloor -e \rfloor = -3, \quad \lfloor 1 \rfloor = 1$$

である（π は円周率，e は自然対数の底とする）。$\lfloor\ \rfloor$ を**切り下げ関数**（floor）と呼ぶ。反対に x 以上の最小の整数を $\lceil x \rceil$ で表し，$\lceil\ \rceil$ を**切り上げ関数**（ceiling）と呼ぶ。明らかに，一般に $\lceil x \rceil \geq x \geq \lfloor x \rfloor$ が成り立つ。3 つの条件 $x \in \mathbb{N}$，$\lceil x \rceil = x$，$\lfloor x \rfloor = x$ は互いに同値だ。注意すべきことは $\lceil -x \rceil = -\lceil x \rceil$，$\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$ は，一般には成り立たないことで，代わりに $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$，$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ が成り立つ。

問題 1.12. $\forall x \in \mathbb{R}\ \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = [x \notin \mathbb{Z}]$ を示せ。

問題 1.13. 切り下げ関数，切り上げ関数を用いて，小数第 n 位での四捨五入を定義せよ。

$\lfloor x \rfloor$ を x の**整数部**とも呼ぶ。$x - \lfloor x \rfloor$ を x の**小数部**と呼ぶ。小数部を記法 $\{x\}$ で表すこともあるが，要素が x だけの集合と紛らわしいので，この記法を使うときは，その旨を断る必要がある。明らかに，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $0 \leq \{x\} < 1$ である。

問題 1.14. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + [1 \leq \{x\} + \{y\}]$ を示せ。

ここで取り上げた Iverson の記法は，いずれも使い方によってはとても便利な記法だが，ここではこれ以上詳述しない。興味があれば文献 [1] の 2 章を参照せよ。

1.4 背理法

推論や証明を進めるには，特別なやり方というものはない。自他ともに納得の行く方法であれば，論法は問われない。しかし，いくつかの特徴的な論法について知っておくことは，実際に推論をする際に有用なので，以下でそれらについて述べる。

背理法は，特別なものではなく，誰もが自然に使っている推論法だが，推論の仕方に特徴があるので特に意識してこういう名がついている。古くは帰謬法と呼ばれた。謬とは，誤りのことなので,「誤りに帰着させる方法」と考えればよい。英語では，reduction to absurdity というのでそれの直訳であろう。あることを証明するのに，その反対を仮定しておいて，それから矛盾が生じることを示す推論法である。

問題 1.15. 素数が無限個あることを証明せよ。これには，普通，背理法を使う必要がある。

1.5 部屋割り論法

部屋割り論法も頻繁に使われる推論法である。英語では pigeon-hole principle などと呼ばれ,「鳩小屋の原理」と訳されることもある。「部屋の数より多くの人がいる場合，どう部屋割りをしても，2 人以上の部屋が少なくとも 1 つできる」という当たりまえのことを述べたものである。自然数の概念が必要なので，背理法ほど基本的とは言えないが，だまされたような印象が少ないので，むしろ背理法より受け入れやすいであろう。

次のような変形や拡張が考えられる。

- n 部屋に mn 人より多くの人を部屋割りすれば，少なくとも一部屋には $m+1$ 人以上が入る。
- 有限個の部屋に無限人を部屋割りすれば，少なくとも一部屋には無限人が入る。

次は部屋割り論法で証明できる問題の一例である。

問題 1.16 (Ramsey の定理: 6 人の場合)**.** 6 人の人が集まり，知り合い同士は，互いに握手をした。この時，この中からうまく 3 人を選んで，次のどちらかにできること証明せよ。

- 3 人は誰も互いに握手をしなかった，つまり知り合いでない。
- 3 人は皆互いに握手をした，つまり知り合いだ。

無限の場合の部屋割り論法を使う証明で有名なものに König の補題がある。

問題 1.17 (König の補題)**.** すべての枝の分岐が有限であるような無限木は，無限の長さの道を持つことを示せ。

Ramsey の定理も，無限の場合に拡張できる。

問題 1.18 (Ramsey の定理: 無限人の場合)**.** 人の無限集合 A があるとする。A の知り合い同士は，互いに握手をした。この時，A の無限部分集合 S を選んで，次のどちらかにできることを証明せよ。

・S の人は，誰も互いに握手をしなかった，つまり知り合いでない。
・S の人は，皆互いに握手をした，つまり知り合いだ。

1.6 数学的帰納法

数学的帰納法とは自然数の全体 $\mathbb{N}$ が持つ基本的な性質に着目した推論方式である。本講義ノートでは，記法 $P[n \leftarrow \alpha]$ で，式 P 中の自由変数 n のすべてに α を代入した式を表すことにする。

一般に P を自然数 n に関する述語とすると，$\forall n \in \mathbb{N}\ P$ が成り立つことを証明するために，

・$P[n \leftarrow 0]$ を示す
・自然数 k に対して，$P[n \leftarrow k]$ を仮定して $P[n \leftarrow k+1]$ を示す

ということが行なわれるが，この証明法を**数学的帰納法**（mathematical induction）と呼ぶ。

数学的帰納法には，いくつか変形が存在する。例えば起点を 0 でなく一般の整数 i に変えて

・$P[n \leftarrow i]$ を示す
・i 以上の整数 k に対して，$P[n \leftarrow k]$ を仮定して $P[n \leftarrow k+1]$ を示す

ということをすれば，$\forall n \in \mathbb{Z}\ (n \geq i \rightarrow P)$ の証明ができたことになる。頻繁に使われる有用な変形に，**累積帰納法**（course of values induction）と呼ばれる次のものがある。

・$\forall k \in \mathbb{N}\ (k < n \rightarrow P[n \leftarrow k])$ を仮定して P を示す

これにより $\forall n \in \mathbb{N}\ P$ の証明ができたことになる。

数の構成や数学的帰納法に関する詳細な議論は後に回し，ここでは，帰納的な証明に慣れるために，いくつかの例題を挙げるに留めるが，数学的帰納法はきわめて有用で頻繁に使われる推論法であるから習熟しておくことが望ましい。

問題 1.19. 次を数学的帰納法によって証明せよ。

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$
(b) $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq 2 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+\ (1+x)^n > 1 + nx)$
(c) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \theta \in \mathbb{R}\ \sin\dfrac{\theta}{2}(1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta) = \cos\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}$
(d) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \theta \in \mathbb{R}\ \sin\dfrac{\theta}{2}(\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta) = \sin\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}$

（ヒント: (c)，(d) は，三角関数の和を積に，積を和に直す公式を利用せよ）

上では，数学的帰納法は，自然数に関する述語を証明する方法として導入したが，次のような形で，自然数に関する関数などを定義する方法としても用いられる。f を定義したい関数とする。

・$f0$ の値を定義する
・自然数 k に対して，fk の値を使って $f(k+1)$ の値を定義する

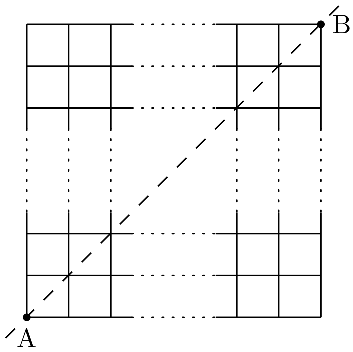
これで任意の自然数 n に対して fn の値を定義したことになる。このような定義の仕方を帰納的定義と呼ぶ。

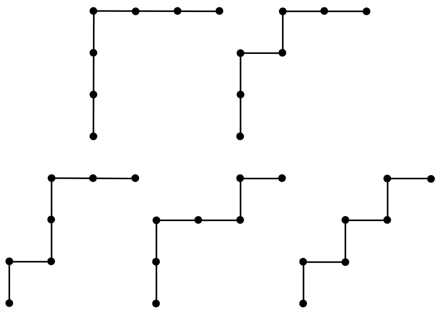
定義の場合にも，累積帰納法に相当する変形がある。

・n より小さい k に対する fk の値をすべて使って fn の値を定義する

数列の漸化式による定義は，帰納的定義または累積帰納法による定義の特殊な場合と考えられる。

問題 1.20 (Catalan 数)**.** 左図のような $n \times n$ の街路において，破線より南東の区域には入らずに A から B まで行く最短の経路の総数を Catalan 数といい，C_n で表す。たとえば $n = 3$ のとき，右図のように 5 通りの経路があるから $C_3 = 5$ だ。





Catalan 数が式

$$C_0 = 1, \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$$

による累積帰納的定義を持つことを説明せよ。また，$C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ であることを証明せよ。

参考文献

[1] Graham, R. L., Knuth, D. E., and Patashnik, O.: “Concrete Mathematics,” Addison-Wesley, 1989.
有澤誠・安村通晃・萩野達也・石畑清 訳,「コンピュータの数学」，共立出版，1993.

[2] Iverson, K. E.: “A Programming Language,” Wiley, 1962.
長山純一・内山昭 訳,「APL プログラミング言語」，講談社，1976.

2 集合

「数学は集合と関数の理論である」と言われることがある。これは，もちろん誇張であるが，真実の一面を表してもいる。というのは，数学で扱われる (特に無限にからむ) 複雑な概念を，曖昧さなく表現し，論理的に厳密に論じようとすると，集合や関数を思考のための道具として使うことが非常に便利だからである。

2.1 集合の表記

集合を表記する標準的な方法は 2 つある。1 つは，その要素を書き並べる方法である。例えば，$X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ というように書く (外延表示)。このとき，$a_1 \in X, a_2 \in X, \ldots, a_n \in X$ であり，逆に $x \in X$ ならば x は $a_1, a_2, \ldots, a_n$ のいずれかに等しい。

もう 1 つは，要素が満たすべき条件を書き下す方法である。P を x に関するある条件とすると，$\{x \mid P\}$ と書くことによって，条件 P を満たす要素 x を集めた集合が表せる (内包表示)。この式の x は，$\forall x\ A$ の x と同様，束縛変数である。たいがいの場合，

$$z \in \{x \mid P\} \iff P[x \leftarrow z] \tag{1}$$

が成立する。しかし，議論している「もの」の範囲を定めずに，これが無条件に成立すると考えると，実は矛盾する。例えば Russell は，$R = \{x \mid x \notin x\}$ を考えると (1) から矛盾が導かれることを示した。

ただし，本講義ノートを含めて，ほとんどの数学理論における議論では，内包表示を分出型 $\{x \in U \mid P\}$ で用いる。ここで，U は既知の集合であり，$\{x \in U \mid P\}$ は，U の要素 x で性質 P を満たすものを集めた集合を意味する。この形で用いる限り，

$$z \in \{x \in U \mid P\} \iff z \in U \wedge P[x \leftarrow z] \tag{2}$$

が無条件に成り立つと考えても矛盾は生じない。

問題 2.1 (Russell のパラドックス)**.** (1) から矛盾が導かれることを確認せよ。また，x に関するある条件 Q を考えて (1) を修正し，

$$z \in \{x \mid P\} \iff (P \wedge Q)[x \leftarrow z] \tag{3}$$

とすると，(3) からは，上の R に関しては，矛盾ではなく $\neg Q[x \leftarrow R]$ が導かれることを示せ。[1]

何も要素を含まない集合を**空集合** (empty set) と呼び，記号 $\emptyset$ で表す。空集合は，外延表示でなら $\{\}$，内包表示でなら $\{x \mid x \neq x\}$ と書ける。

問題 2.2. 次の集合を分出型の内包表示で表せ。

(a) $\{1, 2, 3\}$
(b) $\{1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}\}$

問題 2.3. 次の集合を外延表示せよ。

(a) $\{x \in \mathbb{C} \mid x^6 = 1\}$
(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid (x + \sqrt{-1})^4 \in \mathbb{R}\}$

[1] 集合論の公理的体系の一つでは，この事実を利用して，矛盾を回避する。つまりあらゆる「もの」の集合 U (宇宙と呼ぶ) を考え，Q を $x \in U$ とすれば，$R \notin U$ が導かれるだけである。R は宇宙に属さない，つまり「もの」ではないことになるが，矛盾は生じない。

(c) $\{x \in \mathbb{Q} \mid y^3 = 2\}$
(d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 0.1 < 2^x < 100\}$

$a, b \in \mathbb{R}$ で $a < b$ とするとき，a, b を端点とする実数の区間を次のように定義する。

$$[a..b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\}$$
$$(a..b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$
$$(a..b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqq b\}$$
$$[a..b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x < b\}$$

$[a..b], (a..b), (a..b], [a..b)$ をそれぞれ**閉区間**，**開区間**，**左半開区間**，**右半開区間**と呼ぶ。また，$a \in \mathbb{R}$ に対して，

$$(-\infty..a] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqq a\}$$
$$(-\infty..a) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$
$$[a..\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x\}$$
$$(a..\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

で，$(-\infty..a], (-\infty..a), [a..\infty), (a..\infty)$ を定義する。

内包表示 $\{x \mid P\}$ では，通常 x は変数であるが，式を書く場合があり，そのときは，P を満たす自由変数の値すべてについて，その式が表す「もの」を集めた集合を意味する。例えば

$$\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, \cdots\}$$
$$\{m - n \mid m, n \in \mathbb{N}, mn = 6\} = \{-5, -1, 1, 5\}$$

である。

問題 2.4. x の位置に式を用いた内包表示 $\{x \mid P\}$ で，次の集合をなるべく簡潔に表現せよ。

(a) $\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$
(b) $\{\ldots, -5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2, \ldots\}$

問題 2.5. 次を示せ。

$$\{A \in \mathrm{M}(2, 2; \mathbb{R}) \mid \det A = -1, A^\top = A^{-1}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

ここで，$\mathrm{M}(2, 2; \mathbb{R})$ は 2×2 実行列の全体，$\det A$ は A の行列式，$A^\top$ は A の転置，A^{-1} は A の逆行列を表す。

2.2 集合の関係と演算

集合 X の要素がすべて集合 Y の要素でもあるとき，つまり $\forall x \in X\ x \in Y$ のとき，X は Y の**部分集合** (subset) であるといい[2]，$X \subset Y$ または $Y \supset X$ と書く。例えば,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

[2]「Y が X を**含む**」という言い方をすることもあるが，要素 $x \in Y$ に対しても「Y が x を含む」と言うので，誤解が生じないときに限るべきであろう。

である。$\{x \in U \mid P\}$ は，条件 P の内容にかかわらず，U の部分集合になる。また空集合は他の任意の集合の部分集合である。

2 つの集合は，まったく同じ要素を含むとき，つまり，互いに他方の部分集合になっているときに等しい。例えば,

$$\{a,b\} = \{b,a,a\}, \qquad \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\} = \mathbb{N}, \qquad \{n \in \mathbb{N} \mid n < 0\} = \emptyset$$

である。この性質を集合の外延性と呼ぶ。2 つの集合が等しいかどうかを調べる上での規準となる。

集合 X に含まれない要素の全体を X の**補集合** (complement) といい，$X^{\mathbf{C}}$ と書く。この場合も，普通 $X^{\mathbf{C}}$ の要素を考える範囲を無制限とすることはなく，ある**全体集合** $U(\supset X)$ の範囲内だけを考える。つまり,

$$X^{\mathbf{C}} \overset{\text{def}}{=} \{x \in U \mid x \notin X\}$$

である。例えば $U = \mathbb{R}$ としたとき，$\mathbb{Q}^{\mathbf{C}}$ は (虚数でない) 無理数の全体である。明らかに $(X^{\mathbf{C}})^{\mathbf{C}} = X$ である。全体集合 U はたいがいの場合，文脈から明らかであるが，もしそれを明記する必要があれば，$X^{\mathbf{C}}$ でなく $U \setminus X$ と書く。一般に**差集合** (difference) $X \setminus Y$ は $\{x \in X \mid x \notin Y\}$ と定義される。

集合 X と Y の両方に属する要素を集めた集合を X と Y の**共通部分** (intersection) といい，$X \cap Y$ と書く。X と Y のどちらかに属する要素を集めた集合を X と Y の**合併** (union) といい，$X \cup Y$ と書く。すなわち,

$$a \in X \cap Y \overset{\text{def}}{\iff} a \in X \wedge a \in Y, \quad a \in X \cup Y \overset{\text{def}}{\iff} a \in X \vee a \in Y$$

である。$A \cap B \neq \emptyset$ のとき，集合 A と B は**交わる** (meet, intersect) といい，反対に $A \cap B = \emptyset$ のとき，**交わらない**とか**互いに素** (disjoint) であるという。

問題 2.6 (De Morgan の法則). 全体集合を U とする。集合 $X, Y, Z \subset U$ について，次を示せ。

(a) $(X \cup Y)^{\mathbf{C}} = X^{\mathbf{C}} \cap Y^{\mathbf{C}}$
(b) $(X \cap Y)^{\mathbf{C}} = X^{\mathbf{C}} \cup Y^{\mathbf{C}}$
(c) $X \subset Z \Longrightarrow X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap Z$
(d) $X \cap Z = \emptyset \iff X \subset Z^{\mathbf{C}} = \emptyset \iff Z \subset X^{\mathbf{C}}$

(a) と (b) を De Morgan の法則という。

問題 2.7 (対称差). 集合 X と Y の**対称差** (symmetric difference) $X \triangle Y$ を

$$X \triangle Y \overset{\text{def}}{=} (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

で定義する。次を示せ。

(a) $X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$
(b) $X \triangle Y = Y \triangle X$
(c) $X \triangle \emptyset = X$
(d) $X \triangle X = \emptyset$
(e) $X \triangle (Y \triangle Z) = (X \triangle Y) \triangle Z$
(f) $(X \triangle Y) \cap Z = (X \cap Z) \triangle (Y \cap Z)$

要素 x と y の**対** (pair)[3]を $\langle x, y\rangle$ と書く。ここでは，対とは何かということは定義しない。対というものがの持つべき重要な性質として

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \iff a = c \wedge b = d \tag{4}$$

[3]集合 $\{x, y\}$ と明確に区別するために順序対 (ordered pair) と呼ぶことも多い。

があるが，この性質さえ満足されるなら，対の定義として何を採用してもよい。

問題 2.8. 対 $\langle x, y\rangle$ を集合 $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ として定義するという案がある。この定義のもとで (4) を証明せよ。

X と Y を任意の集合とする。**直積** (direct product)[4] $X \times Y$ を X の要素 x と Y の要素 y との対 $\langle x, y\rangle$ の全体として定義する。つまり

$$X \times Y \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, y\rangle \mid x \in X, y \in Y\}$$

である。

同様に，3 つ組を $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ のように書く。3 つ組とは何かということも定義しないが，$\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ を $\langle\langle a_1, a_2\rangle, a_3\rangle$ や $\langle a_1, \langle a_2, a_3\rangle\rangle$ と同一視することがある。4 つ組以上についても同様である。集合 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に対して，その直積を

$$X_1 \times X_2 \times \cdots X_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \mid a_1 \in X_1, a_2 \in X_2, \ldots, a_n \in X_n\}$$

と定義する。この集合は，通常の積と同様に記号 $\prod$ を使って，$\prod_{i=1}^n X_i$ と表記されることもある。$\prod_{i=1}^n X_i$ の要素 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ の i 番目の成分 x_i を x の第 i **座標** (coordinate) と呼ぶ。

集合 X と X 自身の直積 $X \times X$ を X^2 と記す。一般に n 個の X の直積を X^n と記す。X^n の要素は成分を縦に n 個並べて縦ベクトルとして表示することも多い。周知のように $\mathbb{R}^n$ は n 次元実ベクトル空間になる。

問題 2.9. 集合 A, B, C, A', B' について，次を証明せよ。

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
(c) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$
(d) $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$
(e) $(A \times B) \setminus (A' \times B') = ((A \setminus A') \times B) \cup (A \times (B \setminus B'))$
(f) $(A \times B) \cup (A' \times B') = ((A \cup A') \times (B \cup B')) \setminus (((A \setminus A') \times (B' \setminus B)) \cup ((A' \setminus A) \times (B \setminus B')))$

2.3 集合族，ベキ集合，集合列の極限

集合を要素とする集合を**集合族** (family of sets) という。集合族 $\mathcal{U} = \{X_i \mid i \in I\}$ を考える。すなわち，任意のインデックス $i \in I$ について X_i が集合であるとする。このとき，全ての X_i に属する要素の集合を $\bigcap_{i \in I} X_i$，どれかの X_i に属する要素の集合を $\bigcup_{i \in I} X_i$ と記し，それぞれ集合族 $\mathcal{U}$ の**共通部分** (intersection)，**合併** (union) と呼ぶ。すなわち

$$x \in \bigcap_{i \in I} X_i \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall i \in I\ x \in X_i, \quad x \in \bigcup_{i \in I} X_i \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists i \in I\ x \in X_i$$

である。

問題 2.10 (De Morgan の法則)**.** 集合族 $\{X_i \mid i \in I\}$ と集合 U について，次を証明せよ。

$$U \setminus \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcap_{i \in I} (U \setminus X_i), \quad U \setminus \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} (U \setminus X_i)$$

[4]デカルト積 (Cartesian product) と呼ぶこともある。

問題 2.11. 集合族 $\{X_i \mid i \in I\}$ と $\{Y_j \mid j \in J\}$ について，次を証明せよ。

(a) $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{\langle i,j\rangle \in I\times J}(X_i \cup Y_j)$
(b) $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{\langle i,j\rangle \in I\times J}(X_i \cup Y_j)$
(c) $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{\langle i,j\rangle \in I\times J}(X_i \cap Y_j)$
(d) $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{\langle i,j\rangle \in I\times J}(X_i \cap Y_j)$
(e) $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{\langle i,j\rangle \in I\times J}(X_i \times Y_j)$
(f) $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{\langle i,j\rangle \in I\times J}(X_i \times Y_j)$

集合 X の部分集合の全体を 2^X と書き，X の**ベキ集合** (power set) と呼ぶ。つまり

$$2^X \stackrel{\text{def}}{=} \{Y \mid Y \subset X\}$$

である。

問題 2.12. 集合 X と Y について，次を証明せよ。(c), (e), (g) については，反対向きの包含関係が成立しない例も示せ。

(a) $2^X \subset 2^Y \iff X \subset Y$
(b) $2^{X\cap Y} = 2^X \cap 2^Y$
(c) $2^{X\cup Y} \supset 2^X \cup 2^Y$
(d) $2^{X\cup Y} = 2^X \cup 2^Y \iff X \subset Y \vee Y \subset X$
(e) $2^{X\setminus Y} \supset 2^X \setminus 2^Y$
(f) $2^{X\setminus Y} \subset 2^X \setminus 2^Y$ は決して成立することがない。
(g) $2^{X\times Y} \supset \{A \times B \mid A \in 2^X, B \in 2^Y\}$

問題 2.13. 集合族 $\{A_i \mid i \in I\}$ について次を証明せよ。$=$ が成立しないものについては，反例を示せ。

(a) $\bigcap_{i\in I}(2^{A_i}) = 2^{(\bigcap_{i\in I} A_i)}$
(b) $\bigcup_{i\in I}(2^{A_i}) \subset 2^{(\bigcup_{i\in I} A_i)}$

2^X の部分集合を X の**部分集合族** (family of subsets of X) と呼ぶ。$\mathcal{U}$ を X の部分集合族とするとき $\bigcup_{A\in\mathcal{U}} A$ や $\bigcap_{A\in\mathcal{U}} A$ は X の部分集合であるが，それらを単に $\bigcup\mathcal{U}$，$\bigcap\mathcal{U}$ と記す。空集合 $\emptyset$ も X の部分集合族とみなすことができるが，その場合，$\bigcup\emptyset = \emptyset$，$\bigcap\emptyset = X$ と定義する。

問題 2.14. X の部分集合族 $\mathcal{U}$，$\mathcal{V}$ について次を証明せよ。

(a) $(\bigcup\mathcal{U}) \cup (\bigcup\mathcal{V}) = \bigcup(\mathcal{U} \cup \mathcal{V})$
(b) $(\bigcap\mathcal{U}) \cap (\bigcap\mathcal{V}) = \bigcap(\mathcal{U} \cup \mathcal{V})$

集合列 $A_0, A_1, A_2, \ldots$ に対し，**上極限** (limit sup) $\overline{\lim} A_n$ および**下極限** (limit inf) $\underline{\lim} A_n$ を次のように定義する。[5]

$$\overline{\lim} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k, \qquad \underline{\lim} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

直観的には，集合列 $A_0, A_1, A_2, \ldots$ の上極限とは無限個の A_n に含まれる要素の集まりであり，下極限とは有限個を除くすべての A_n に含まれる要素の集まりである。上極限と下極限が一致するとき，両極限を単に $\lim A_n$ と表し，集合列 $A_0, A_1, A_2, \ldots$ は $\lim A_n$ に**収束する** (converge) という。

[5] 上極限は $\lim\ \sup A_n$，下極限は $\lim\ \inf A_n$ と表記することも多い。

問題 2.15. 次を証明せよ。

(a) $\overline{\lim} A_n \supset \underline{\lim} A_n$
(b) $\overline{\lim}(A_n)^{\mathbf{C}} = (\underline{\lim} A_n)^{\mathbf{C}}$, $\quad \underline{\lim}(A_n)^{\mathbf{C}} = (\overline{\lim} A_n)^{\mathbf{C}}$
(c) $(\underline{\lim} A_n) \cup (\underline{\lim} B_n) \subset \underline{\lim}(A_n \cup B_n)$, $\quad (\overline{\lim} A_n) \cup (\overline{\lim} B_n) \supset \overline{\lim}(A_n \cup B_n)$
(d) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \Longrightarrow \lim A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$
(e) $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \Longrightarrow \lim A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$
(f) 上極限と下極限の一致しない例を示せ

問題 2.16. 次の集合を区間として表記せよ。つまり，開区間 $(a..b)$，半開区間 $[a..b)$，$(a..b]$，閉区間 $[a..b]$ のいずれかの形に書き表せ。

(a) $\bigcap_{i=1}^{\infty}(-1..1/i)$
(b) $\bigcup_{i=1}^{\infty}(-1..-1/i)$
(c) $\bigcup_{n=k}^{\infty}(1/n^2..1+1/n)$
(d) $\overline{\lim}(1/n^2..1+1/n)$
(e) $\bigcap_{n=k}^{\infty}((-1/n..1/n] \cup (1/n^2..1+1/n))$
(f) $\underline{\lim}((-1/n..1/n] \cup (1/n^2..1+1/n))$

3　関数（写像）

ここでは，X と Y を任意の集合とし，X から Y への**関数** (function) について考える。また，本講義ノートでは**写像** (mapping) という言葉を関数と全く同じ意味で用いる。関数とは何かということは定義しない。X から Y への関数 f というものがの持つべき重要な性質として

$$\forall x \in X \ fx \in Y$$

がある。集合論では通常，関数 f はそのグラフ

$$\{(x, fx) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

すなわち $X \times Y$ の部分集合として定義されるがが，上の性質さえ満足されるなら，定義として何を採用してもよい。

3.1　関数の概念と表記（ラムダ記法）

X から Y への関数の全体を Y^X と書く。上に述べた関数の性質から分かるように，X からの関数 f を定義するには，各 $x \in X$ に対して fx の値を定めてやればよい。このとき，$fx \in Y$ となるようにすれば，f は Y への関数，つまり $f \in Y^X$ となる。

$x \in X$ での値 fx は Y の要素であればよく，x での f の値 fx の決め方になんら基準は必要ないが，現実の数学の理論に登場する関数 f では fx を x を含むような数式を用いて定義することが多い。たとえば一次関数 $fx = 3x + 4$ のような場合である。このようなときに，関数を表現するのにいちいち f という文字を導入し，それを経由して関数を表記するのがわずらわしいこともあるので，本講義ノートでは上のような一次関数 f を直接に $\lambda x \in \mathbb{R}\ 3x + 4$ と表記することがある。一般に $\lambda x \in X\ P$ という表記は，その定義域が X であり，$a \in X$ での値が $P[x \leftarrow a]$ であるような関数をあらわす。このような関数の表記法を**ラムダ記法** (lambda notation) と呼ぶ。記法 $\lambda x \in X\ P$ では，x は束縛変数であり，x が X 内を動くときにその値が P となる関数を全体として表記していることに注意されたい。もちろん $(\lambda x \in X\ P)a$ と書かれれば別で，その関数の a での値 $P[x \leftarrow a]$ を意味する。ラムダ表記は，関数の定義域を明示したり，式の中の x 以外の記号が自由変数であることを明らかにする上でも有用である。たとえば，$y \in \mathbb{R}$ のとき，$\lambda x \in \mathbb{R}\ yx + y - 1$ は，$(0, y - 1)$ を通る傾き y の直線をグラフとして持つ $\mathbb{R}$ 上の一次関数を表しているが，y は自由変数であり，表現されている関数（グラフ，直線）は y の値により異なる。同様に $x \in \mathbb{R}$ のとき，$\lambda y \in \mathbb{R}\ yx + y - 1$ も一次関数を表しているが，今度は x が自由変数である。当然,（たとえば原点での）値も異なり，$(\lambda x \in \mathbb{R}\ yx + y - 1)0 = (yx + y - 1)[x \leftarrow 0] = y - 1$ であるが，$(\lambda y \in \mathbb{R}\ yx + y - 1)0 = (yx + y - 1)[y \leftarrow 0] = -1$ である。

$X \subset Y$ とするとき $\lambda x \in X\ x$ で定義される写像を X から Y への**包含写像** (inclusion map) と呼ぶ。特に $X = Y$ であるとき，包含写像を X 上の**恒等関数** (identity funtion) と呼び，$\mathbf{id}_X$ と記す。また，値が常に一定値 $b \in Y$ をとる写像 $\lambda x \in X\ a$ を a への**定値写像**という。

X からの 2 つの関数 f と g は，各 $x \in X$ に対しての値が等しいとき，つまり $\forall x \in X\ fx = gx$ のとき，等しいとされる。

3.2　関数の合成，像，逆像

$f \in Y^X, g \in Z^Y$ とする。このとき f と g の**合成** (composition) $g \circ f$ を $\lambda x \in X\ g(fx)$ と定義する。$(g \circ f) \in Z^X$ となることは明らかであろう。また，$\forall f \in Y^X\ \mathbf{id}_Y \circ f = f \circ \mathbf{id}_X = f$ であることも明らかであろう。

問題 3.1. $f \in Y^X, g \in Z^Y, h \in W^Z$ とする。このとき $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ を示せ。

$f \in Y^X$ とする。このとき，$A \subset X, B \subset Y$ に対して f による**像** (image) fA と**逆像** (inverse image) $f^{-1}B$ を

$$fA \stackrel{\text{def}}{=} \{fx \in Y \mid x \in A\}, \qquad f^{-1}B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid fx \in B\}$$

で定義する。

問題 3.2. 実数関数 $fx = x(x-4)$ に対して，次の集合を計算せよ。

(a) $f[0..3)$
(b) $f^{-1}(-3..0]$
(c) $f^{-1}(-5..a)$ (ただし $a > -4$ とする)

問題 3.3. f を X から Y への写像とし，$A, A' \in X$，$B, B' \in Y$ とする。次を示せ。$=$ が成立しないものについては，反例を示せ。

(a) $f(A \cup A') = fA \cup fA'$, $\qquad f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}B \cup f^{-1}B'$
(b) $f(A \cap A') \subset fA \cap fA'$, $\qquad f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}B \cap f^{-1}B'$
(c) $f(A \setminus A') \supset fA \setminus fA'$, $\qquad f^{-1}(B \setminus B') = f^{-1}B \setminus f^{-1}B'$
(d) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}B'$ $\qquad$ （$f(X \setminus A)$ と $Y \setminus fA$ の間に成立する一般的包含関係はない）
(e) $f(f^{-1}B) \subset B$, $\qquad A \subset f^{-1}(fA)$

問題 3.4. 写像 $f \in Y^X$ と $g \in Z^Y$ について次を示せ。

(a) $\forall A \in 2^X (g \circ f)A = g(fA)$
(b) $\forall C \in 2^Z (g \circ f)^{-1}C = f^{-1}(g^{-1}C)$

3.3 単射，全射，全単射

$f \in Y^X$ とする。このとき，$\forall x, x' \in X\ (fx = fx' \to x = x')$ であれば f を**単射** (injection) という。また，$\forall y \in Y\ \exists x \in X\ fx = y$ であれば f を**全射** (surjection) という。全射かつ単射であるような関数を**全単射** (bijection) という。

問題 3.5. 包含写像は単射であることを示せ。また恒等関数は全単射であることを示せ。

問題 3.6. $f \in Y^X$ とするとき，f に関する次の条件が同値であることを証明せよ。

(a) f が単射である。
(b) $X = \emptyset \vee \exists h \in X^Y\ h \circ f = \mathbf{id}_X$
(c) $\forall A \in 2^X\ f^{-1}(fA) = A$
(d) $\forall Z\ \forall g, g' \in X^Z\ (f \circ g = f \circ g' \to g = g')$
(e) $\forall A, A' \in 2^X\ f(A \cap A') = fA \cap fA'$
(f) $\forall A, A' \in 2^X\ f(A \setminus A') = fA \setminus fA'$

問題 3.7. $f \in Y^X$ とするとき，f に関する次の条件が同値であることを証明せよ。

(a) f が全射である。
(b) $\forall A \in 2^Y\ f(f^{-1}B) = B$
(c) $\exists h \in X^Y\ f \circ h = \mathbf{id}_Y$

(d) $\forall Z\ \forall g, g' \in Z^Y\ (g \circ f = g' \circ f \to g = g')$

問題 3.8. f を X から Y への写像とする。f が全単射になるための必要十分条件は，$g \circ f = \mathbf{id}_X \wedge f \circ g' = \mathbf{id}_Y$ を満たす $g, g' \in X^Y$ が存在することであることを示せ。また，こととき $g = g' = f^{-1}$ となることを示せ。

問題 3.9. f を集合 X から有限集合 Y への写像とする。f を全射とするとき，単射 $g \in X^Y$ を Y の要素数に関する帰納法で構成せよ。

問題 3.10. f を集合集合 X から有限集合 Y への写像とする。X と Y の要素数が同じであるとき次を示せ。

$$f \text{ は単射} \iff f \text{ は全射} \iff f \text{ は全単射}$$

問題 3.11. f を X から Y への写像とする。f が全単射になるための必要十分条件は，$g \circ f = \mathbf{id}_X \wedge f \circ g' = \mathbf{id}_Y$ を満たす $g, g' \in X^Y$ が存在することであることを示せ。また，こととき $g = g' = f^{-1}$ となることを示せ。

問題 3.12. 集合 X から集合 Y への単射が存在するための必要十分条件は Y から X への全射が存在することであることを示せ。

問題 3.13. f を X から Y への写像とする。2^X から 2^Y への写像 f_* と 2^Y から 2^X への写像と f^* を次のように定義する。

$$\forall A \in 2^X\ f_*A \overset{\text{def}}{=} fA, \qquad \forall B \in 2^Y f^*B \overset{\text{def}}{=} f^{-1}B$$

このとき次を示せ。

(a) f が単射 $\iff$ f_* が単射 $\iff$ f^* が全射
(b) f が全射 $\iff$ f_* が全射 $\iff$ f^* が単射

問題 3.14. A を空でない集合，Z を 2 つ以上の要素を持つ集合とする。X から Y への写像 f に対し，X^A から Y^A への写像 f_* と，Z^Y から Z^X への写像 f^* とを

$$f^* \overset{\text{def}}{=} \lambda g \in X^A\ f \circ g, \qquad f_* \overset{\text{def}}{=} \lambda g \in Z^Y\ g \circ f$$

と定義する。このとき次を示せ。

(a) f が単射 $\iff$ f_* が単射 $\iff$ f^* が全射
(b) f が全射 $\iff$ f_* が全射 $\iff$ f^* が単射

問題 3.15. 写像 $f, f' \in Y^X$ と $g, g' \in Z^Y$ について次を示せ。

(a) f と g が単射であれば，$g \circ f$ も単射である。
(b) f と g が全射であれば，$g \circ f$ も全射である。
(c) $g \circ f$ が全射であれば，g も全射である。
(d) $g \circ f$ が単射であれば，f も単射である。
(e) f が全射で $g \circ f = g' \circ f$ ならば，$g = g'$ である。
(f) g が単射で $g \circ f = g \circ f'$ ならば，$f = f'$ である。
(g) $g \circ f$ が全射で，g が単射ならば，f は全射である。
(h) $g \circ f$ が単射で，g が全射ならば，f は単射である。

$A \subset X$ とするとき，$x \mapsto [x \in A]$ は X から $\{0,1\}$ への関数である。これを X の部分集合 A の**特徴関数**と呼ぶ。(χ_A などと書くこともあるが，ラムダ記法を使えば $\lambda x \in X\ [x \in A]$ と書ける。

問題 3.16. 3.13 集合 X の部分集合 $A, B \subset X$ に対して次を示せ。

(a) $A \subset B \iff \forall x \in X\ [x \in A] \leqq [x \in B]$
(b) $\forall x \in X\ [x \in A \cap B] = [x \in A][x \in B]$
(c) $\forall x \in X\ [x \in A \cup B] = [x \in A] + [x \in B] - [x \in A][x \in B]$
(d) $\forall x \in X\ [x \in X \setminus A] = 1 - [x \in A]$
(e) $\forall x \in X\ [x \in A \setminus B] = [x \in A] - [x \in A][x \in B]$

4 関係，選択公理，順序

4.1 関係

集合 X と Y の（2 項）**関係** ((binary) relation) とは $X \times Y$ の部分集合のことである。一般に $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の部分集合を n **項関係** (n-ary relation) という。特に X 上の n 項関係とは X^n の部分集合のことである。R が関係であるとき，$\langle x, y \rangle \in R$ を xRy と略記する。関数 $f \in Y^X$ に対して

$$\{\langle x, fx \rangle \mid x \in X\}$$

で定義される X と Y の関係を写像 f の**グラフ** (graph) という。任意の集合 X に対して

$$\Delta_X = \{\langle x, x \rangle \mid x \in X\}$$

で定義される X 上の関係 Δ_X を**恒等関係** (identity) という。関係 $R \subset X \times Y$ に対して

$$xR^{-1}y \overset{\text{def}}{\iff} yRx$$

で定義される Y と X の関係 R^{-1} を R の**逆関係** (inverse rellation) という。関係 $R_1 \subset X \times Y$ と $R_2 \subset Y \times Z$ に対して

$$x(R_1 \circ R_2)z \overset{\text{def}}{\iff} \exists y \in Y\ (xR_1y \wedge yR_2z)$$

で定義される X と Z の関係 $R_1 \circ R_2$ を R_1 と R_2 の**合成** (composition) という。X 上の 2 項関係 R の n 個の合成 $\underbrace{R \circ R \circ \cdots \circ R}_{n}$ を R^n と記す。また便宜上 $R^0 \overset{\text{def}}{=} \Delta_X$ と定義する。

問題 4.1. $R_1 \subset X \times Y, R_2 \subset Y \times Z, R_3 \subset Z \times W$ とする。次を示せ。

(a) $\Delta_X \circ R_1 = R_1 \circ \Delta_Y = R_1$
(b) $(R_1^{-1})^{-1} = R_1$
(c) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$
(d) $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

集合 X 上の**同値関係** (equivalent relation) とは次の性質を満たす X 上の関係 $\sim$ である。

(a) 反射律: $\forall x \in X\ x \sim x$ (i.e. $\Delta_X \subset \sim$)
(b) 対称律: $\forall x, y \in X\ (x \sim y \to y \sim x)$ (i.e. $\sim\, = \,\sim^{-1}$)
(c) 推移律: $\forall x, y, z \in X\ (x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z)$ (i.e. $(\sim \circ \sim) \subset \sim$)

$\sim$ を集合 X 上の同値関係とするとき，$x \in X$ の**同値類** $x/\sim$ [6]を次のように定義する。

$$(x/\sim) \overset{\text{def}}{=} \{y \in X \mid x \sim y\}$$

問題 4.2. $\sim$ を集合 X 上の任意の同値関係とする。$x_1, x_2 \in X$ に関する次の 4 条件が同値であることを示せ。

(a) $x_1 \in (x_2/\sim)$
(b) $x_1 \sim x_2$
(c) $(x_1/\sim) = (x_2/\sim)$

[6] 教科書によっては $[x]$ や $[x]_\sim$ と表記する流儀も多い。

(d) $(x_1/\sim) \cap (x_2/\sim) \neq \emptyset$

集合 X 上に同値関係 $\sim$ が存在すれば，互いに同値の関係にあるものを同一視することにより，X の要素が類別される。類別が行なわれた結果の集合を**商集合** (quotient set) といい，$X/\sim$ と書く。厳密には，

$$(X/\sim) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x/\sim) \mid x \in X\}$$

と定義される。また，

$$\pi x \stackrel{\text{def}}{=} (x/\sim)$$

と定義されるもとの集合 X から商集合 $X/\sim$ への写像 π を**自然写像** (natural mapping) という。定義より明らかに自然写像は全射だ。

問題 4.3. 写像 $f \in Y^X$ に対し，

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\iff} fx = fy$$

で定義される関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ。このとき f は全射 $g \in (X/\sim)^X$ と単射 $h \in Y^{X/\sim}$ とにより $f = h \circ g$ の形に分解できることを示せ。

問題 4.4. $\mathbb{R}$ 上の関係 $=$，$\leqq$，$<$ は同値関係か。

問題 4.5. $S \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とする。正の実数 λ が存在して $\langle x, y\rangle = \langle \lambda x', \lambda y'\rangle$ のとき，$\langle x, y\rangle \sim \langle x', y'\rangle$ であるとして，S 上の関係 $\sim$ を定義する。$\sim$ は同値関係であり，各同値類には単位円周上の点 (すなわち $x^2 + y^2 = 1$ を満たす点) $\langle x, y\rangle$ がただ 1 つ含まれることを示せ。

4.2 無限直積集合と選択公理

n 個の集合 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の直積 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ は，$\{1, 2, \ldots, n\}$ から $\bigcup_{i=1}^n X_i$ への関数 x で $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ xi \in X_i$ を満たすものの全体と同一視することができる。

これを一般化して，(添字付けられた）集合族 $\{X_i \mid i \in I\}$ の**直積** (direct product) $\prod_{i\in I} X_i$ は，I から $\bigcup_{i\in I} X_i$ への関数 x で

$$\forall i \in I\ xi \in X_i$$

という性質を持つものの全体と定義するのが普通である。このとき，値 xi を x の i **座標** (coordinate) とか i **成分**とと呼ぶ。xi の代わりに x_i と書くことも多い。

$i \in I$ とする。直積 $X = \prod_{i\in I} X_i$ から X_i への関数 $\lambda x \in X\ xi$ を i 座標への**射影** (projection) と呼び，π_i と記す。すなわち $\pi_i x = xi$ である。

問題 4.6. 集合族 $\{A_i \mid i \in I\}$, $\{B_i \mid i \in I\}$ に関し次を証明せよ。$=$ が成立しないものについては，反例を示せ。

(a) $(\prod_{i\in I} A_i) \cap (\prod_{i\in I} B_i) = \prod_{i\in I}(A_i \cap B_i)$
(b) $(\prod_{i\in I} A_i) \cup (\prod_{i\in I} B_i) \subset \prod_{i\in I}(A_i \cup B_i)$

（添字付けられた）集合族 $\{X_i \mid i \in I\}$ に対して

$$\exists i \in I\ X_i = \emptyset \Longrightarrow \prod_{i\in I} X_i = \emptyset$$

は自明だが，この逆

$$\forall i \in I\ X_i \neq \emptyset \Longrightarrow \prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$$

を**選択公理** (axiom of choice)[7]という。直積の定義にまで戻れば，選択公理は

$$\forall i \in I\ \exists x\ x \in X_i \Longrightarrow \exists x \in (\bigcup_{i\in I} X_i)^I\ \forall i \in I\ xi \in X_i$$

ということを主張している。一見，自明なような印象があるが，束縛変数 i の有効範囲が左辺と右辺で異なっていることからわかるように，I や X_i の状況によっては，自明からはほど遠い。実際，ZF など，現在主流の公理的集合論においては，選択公理もその否定も他の公理からは導けないことが証明されている。

問題 4.7. 選択公理を用いて次を示せ。

(a) 各 $i \in I$ について $A_i \neq$ ならば，各射影 $\pi_{i_0} : \prod_{i\in I} A_i \to A_{i_0}$ は全射である。
(b) 各 $i \in I$ について $A_i \neq$ ならば，

$$\prod_{i\in I} A_i \subset \prod_{i\in I} B_{i_0} \iff \forall i \in I\ A_i \subset B_i$$

問題 4.8. 各 $i \in I$ について関数 $f_i : A_i \to B_i$ が与えらたとき，関数 $f : \prod_{i\in I} A_i \prod_{i\in I} B_i$ を $f(a)_i = f_i(a_i)$ で定義する。λ 記法で f を明示すれば，

$$f = \lambda a \in \prod_{i\in A_i} \lambda_{i\in I}\ f_i(a_i)$$

である。選出公理を用いて次を示せ。

(a) f が全射であるための必要十分条件は各 $i \in I$ について f_i が全射であることである。
(b) f が単射であるための必要十分条件は各 $i \in I$ について f_i が単射であることである。

4.3 順序

集合 X 上の**順序**（order）あるいは**半順序**（partial order）[8]とは次の性質を満たす X 上の 2 項関係 $\leqq$ である。

(a) 反射律　$\forall x \in X\ x \leqq x$　(i.e. $\Delta_X \subset \leqq$)
(b) 反対称律　$\forall x, y \in X\ (x \leqq y \land y \leqq x \to x = y)$　(i.e. $(\leqq \cap \leqq^{-1}) \subset \Delta_X$)
(c) 推移律　$\forall x, y, z \in X\ (x \leqq y \land y \leqq z \to x \leqq z)$　(i.e. $\leqq \circ \leqq) \subset \leqq$)

反射律と推移律だけを満たす関係を**前順序**（preorder）という。

問題 4.9. $\leqq$ を X 上の前順序とする。X 上の関係 $\sim$ を

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x \leqq y \text{ かつ } y \leqq x$$

で定義すると $\sim$ は同値関係になることを示せ。また商集合 $A/\sim$ 上の関係 $\leqq'$ を

$$[x] \leqq' [y] \overset{\text{def}}{\iff} x \leqq y$$

で定義することにより $\leqq'$ は順序になることを示せ。

[7]選出公理と呼ぶこともある
[8]これは後述する全順序と区別するための用語で，通常，順序と言うだけで十分である。しかし，教科書によっては単に順序というだけでは，全順序を意味する場合があるので注意したい。

問題 4.10. X 上の関係 $<$ を

$$x < y \overset{\text{def}}{\iff} x \leqq y \wedge x \neq y$$

で定義すると，$<$ は，次の性質を持つことを示せ，

(d) 非反射律　$\forall x \in X\ x \not< x$
(e) 推移律　$\forall x, y, z \in X\ x < y \wedge y < z \to x < z$

上を満足する X 上の関係 $<$ を**狭義順序**と呼ぶが，逆に狭義順序 $<$ が与えられた時，関係 $x \leqq y$ を $x < y \vee x = y$ で定義すれば，$\leqq$ は順序になることを示せ。

順序 $\leqq$ の逆関係 $\leqq^{-1}$ を普通 $\geq$ と書く。また，$<^{-1}$ を $>$ と書く。

集合 X とその上の順序 $\leqq$ を対にした $\langle X, \leqq\rangle$ を**順序集合**と呼ぶ。$\leqq$ が明らかなときは，単に X を順序集合と呼ぶことがある。明らかに $\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ は，通常の大小関係により，順序集合となる。また，任意の集合 X について，2^X は，包含関係により順序集合となる。

問題 4.11. 関係 Δ_X が X 上の順序になる（これを X 上の**離散順序**という）ことを示せ。順序 $\leqq$ の逆関係 $\geq$ もまた順序になることを示せ。$\geq$ を $\leqq$ の**逆順序**（reverse order）という。

問題 4.12. R を集合 X 上の任意の 2 項関係とするとき，R^* を $\bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$ と定義し，R の**反射推移閉包** (refrexive transitive closure) と呼ぶ。また $(R \cup R^{-1})^*$ を R の**反射推移対称閉包** (refrexive transitive simmetric closure) と呼ぶ。

(a) 反射推移閉包は，常に前順序になることを示せ。
(b) 反射推移対称閉包は，常に同値関係になることを示せ。

順序集合 $\langle X, \leqq\rangle$ から $\langle X', \leqq'\rangle$ への関数 f が

$$\forall x, y \in X\ (x \leqq y \Longrightarrow f(x) \leqq' f(y))$$

という性質を持つとき，**順序準同型写像**（order-homomorphism）と呼ぶ[9]。さらに f が全単射であり，

$$\forall x, y \in X\ (x \leqq y \iff f(x) \leqq' f(y))$$

という性質を持てば，f を**順序同型写像**（order-isomorphism）と呼ぶ。また，このような時に，X と Y は**順序同型**であるといい，$X \cong Y$ と書く。

$\leqq$ を X 上の順序, $\leqq'$ を X' 上の順序とする。$X' \subset X$ であり，任意の $x, y \in X'$ に対して $x \leqq' y$ ならば $x \leqq y$ となるとき，すなわち $\leqq' \subset \leqq$ のとき $\leqq$ は $\leqq'$ の**拡大**（extension）であるという。$\leqq$ を X 上の順序, $S \subset X$ とするとき，任意の $x, y \in S$ に対して

$$x \leqq' y \overset{\text{def}}{\iff} x \leqq y)$$

で，S 上の関係 $\leqq'$ を定義すると，$\leqq'$ は S 上の順序となる。$\leqq'$ を $\leqq$ の S への**制限**と呼ぶ。

問題 4.13. $\leqq$ を X 上の順序, $\leqq'$ を X' 上の順序とし，$X' \subset X$ とする。X' から X への包含写像 $\lambda x \in X'\ x$ が $\langle X', \leqq'\rangle$ から $\langle X, \leqq\rangle$ への順序準同型になるとき，かつそのときに限り，$\leqq$ が $\leqq'$ の拡大になることを示せ。

問題 4.14. $\leqq'$ が $\leqq$ の制限であれば，$\leqq$ は必ず $\leqq'$ の拡大になるが，$\leqq$ が $\leqq'$ の拡大であっても，$\leqq'$ が $\leqq$ の制限になるとは限らないことを例示せよ。

[9] 教科書によっては，順序保存関数（order-preserving function），単調関数（monotone function, isotone function）などと呼ぶことも多い

問題 4.15. $\mathbb{R}$ は開区間 $(-1..1)$ と順序同型であることを示せ。

問題 4.16. $\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ は，どの 2 つも互いに順序同型ではないことを証明せよ。

本節では，以降，特にことわらない限り，$\leqq$ は X 上の順序であるとする。

S を X の部分集合とする。$a \in S$ が $\forall b \in S\ (b \leqq a)$ という性質を持てば，a を S の**最大**（maximum, greatest）の要素であるという。また，$\forall b \in S(a \leqq b \to b = a)$ なる性質を持てば，a を S の**極大**（maximal）の要素と呼ぶ。S の最大要素は，存在すればただひとつであり，$\max S$ と書かれる。対称的に，**最小**（minimum, least），**極小**（minimal）の要素という概念と最小要素を表す記法 $\min S$ が定義される。

順序集合全体 X の最大要素は,（存在すれば）しばしば $\top$ という記号で，また最小要素は $\bot$ という記号で記されるので，以降，断りなく $\top$ や $\bot$ という記号を用いていれば，それらは順序集合全体の最大要素と最小要素を表すものとする。

問題 4.17. 最大要素は，存在すればただひとつであり，それは極大要素でもあることを示せ。極大要素は，存在してもただひとつとは限らないことを例示せよ。

数の区間を表す記法 $[a..b]$，$(a..b]$，$[a..b)$，$(a..b)$ を X の部分集合を表すために援用する。すなわち，$a, b \in X$ に対して**閉区間**（closed interval）$[a..b]$，**開区間**（open interval）$(a..b)$，**開閉区間** $(a..b]$，**閉開区間** $[a..b)$ をそれぞれ次のように定義する。

$$[a..b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid a \leqq x \leqq b\}$$
$$(a..b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid a < x < b\}$$
$$(a..b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid a < x \leqq b\}$$
$$[a..b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid a \leqq x < b\}$$

$a \leqq b$ または $b \leqq a$ であるとき a と b を**比較可能**といい，そうでないとき**比較不能**という。X の部分集合は，そのすべての要素が互いに比較可能なとき**鎖**（chain）と呼ばれる。特に X 全体が鎖であるとき，すなわちすべての要素が互いに比較可能であるとき，順序 $\leqq$ は**線形順序**（linear order）あるいは**全順序**（total order）であると言う。反対に，X の部分集合は，そのすべての要素が互いに比較不能なとき**反鎖**（antichain）と呼ばれる。明らかに，線形順序ではすべての部分集合が鎖であり，離散順序ではすべての部分集合が反鎖である。

線形順序を順序として持つ集合を**全順序集合**または**線形順序集合**，離散順序を順序として持つ集合を**離散順序集合**と呼ぶ。

問題 4.18. X 上の線形順序 $\leqq$ が定義する狭義順序 $<$ は**三分律**

$$\forall x, y \in X\ (x < y \lor x = y \lor x > y)$$

を満たすことを示せ。逆に X 上の狭義順序 $<$ が三分律を満たせば，それが定義する順序 $\leqq$ は線形順序になることを示せ。

$a < b$ なる 2 要素 $a, b \in X$ について，$[a, b] = \{a, b\}$ のとき，つまり $a < c < b$ なる要素 c が存在しないとき，b は a の**直後**の要素であり，逆に a は b の**直前**の要素であるといい，$a \prec b$ と記す。b は a を**カバー**するともいう。最小要素の直後の要素，つまり $\bot \prec a$ なる要素 a を**原子**（atom）と呼ぶ。対称的に，最大要素の直前の要素，つまり $a \prec \top$ なる要素 a を**余原子**（coatom）と呼ぶ。順序集合のどの 2 つの要素 a, b をとっても $a \prec b$ という関係にないとき，その順序集合を**稠密**（dense）という。

問題 4.19. 離散順序集合は稠密であることを示せ。また，有限順序集合は離散集合でなければ稠密になりえないことを示せ。

順序集合 X の部分集合 S が**上に有界**とは，$\forall s \in S\ (s \leq b)$ なる $b \in X$ が存在することをいう。このような b を S の**上界**（upper bound）といい，記号を流用して $S \leq b$ と書く。

S の上界のうち最小のものが存在すれば，それを S の**最小上界**（least upper bound） とか**上限**（sup, join）と呼ぶ。すなわち，b が S の最小上界（上限）であるとは，b が次の 2 条件を満たすことである。

$$S \leq b, \quad \forall a \in X\ (S \leq a \to b \leq a)$$

容易に分かるように，この条件は

$$S \leq b, \quad \forall a \in X\ (S \leq a \leftrightarrow b \leq a)$$

と同値である。このような b は，存在すれば唯ひとつであり，$\bigvee S$ または $\sup S$ と記す。

対称的に，**下に有界**，**下界**（lower bound），**最大下界**（greatest lower bound）（**下限**（inf, meet））の概念や，$b \leq S$，$\bigwedge S$，$\inf S$ という記法が定義される。S の下限 $\bigwedge S$ とは，条件

$$b \leq S, \quad \forall a \in X\ (a \leq S \to a \leq b)$$

を満たす（あるいは同じことだが，条件

$$b \leq S, \quad \forall a \in X\ (a \leq S \leftrightarrow a \leq b)$$

を満たす X の要素 b のことである。

問題 4.20. X が全順序集合で，$S \subset X$ とする。a が S の上限であるためには，次の 2 つを満たすことが必要十分であることを示せ。

(a) $\forall b \in S\ b \leqq a$
(b) $\forall x \in X\ (x < a \to \exists b \in S\ x < b)$

問題 4.21. X が全順序集合で，Y が順序集合とする。写像 $f \in Y^X$ が下記を満たせば，f は順序順同型で単射であることを示せ。

$$\forall x, y \in X\ (x < y \to fx < fy)$$

問題 4.22. 順序集合 X において，$A \subset B \subset X$ とする。このとき $\max A$ が存在すれば $\max A = \sup A$ であることを示せ。$\max A$ と $\max B$ がともに存在すれば $\max A \leq \max B$ であることを示せ。$\sup A$ と $\sup B$ がともに存在すれば $\sup A \leq \sup B$ であることを示せ。$\min A$，$\min B$，$\inf A$，$\inf B$ についても，同様な関係を見出せ。

問題 4.23. $\langle X, \leqq \rangle$ を順序集合とし，$Y \subset X$ かつ $\leqq'$ を $\leqq$ の Y への制限とする。さらに $A \subset Y$ とするとき，$\sup A$ を $\leqq$ で考えているのか，$\leqq'$ で考えているのかを明示したい場合，前者を $\sup_x A$，後者を $\sup_Y A$ と表記する。inf についても同様である。

(a) $\sup_X A$ と $\sup_Y A$ がともに存在すれば $\sup_X \leqq \sup_Y$ であることを示せ。その 2 つが等しくない例を与えよ。
(b) $\sup_X A$ が存在して $\sup_Y A$ が存在しない例を与えよ。
(c) $\sup_Y A$ が存在して $\sup_X A$ が存在しない例を与えよ。

問題 4.24. $\mathbb{N}$ において，$n \mid m$ を n が m を割り切るという関係と定義する。

(a) $\langle \mathbb{N}, \mid \rangle$ が順序になることを示せ。
(b) $\langle \mathbb{N}, \mid \rangle$ では，$\perp$ と $\top$ は何になるか？
(c) $\langle \mathbb{N}, \mid \rangle$ では，有限集合 $S \subset \mathbb{N}$ に対して $\sup S$ と $\inf S$ は何を意味するか？
(d) $\langle \mathbb{N}, \mid \rangle$ では,「カバーする」とか，原子，余原子は，何を意味するか？

問題 4.25. X を任意の集合とする。包含関係による順序集合 2^X において，$\mathcal{U} \subset 2^x$ を X の部分集合族とするとき $\sup \mathcal{U}$ と $\inf \mathcal{U}$ はそれぞれ何を意味するか？また，カバーする」とか，原子，余原子は，何を意味するか？

問題 4.26. X 上の順序は $X \times X$ の部分集合と考えることができる。したがって，X 上の順序の全体 $\mathcal{O}(X)$ は，それ自身，集合としての包含関係により順序集合をなすが，離散順序は $\mathcal{O}(X)$ の最小の要素であることを示せ。また，$\mathcal{O}(X)$ の極大要素とは線形順序に他ならないことを示せ。

5 数の体系

5.1 自然数，ペアノの公理，数学的帰納法

Peano は，自然数の公理系[10]として次の 5 つの公理を挙げた。

(P1) $0 \in \mathbb{N}$
(P2) $\forall n \in \mathbb{N}\ Sn \in \mathbb{N}$
(P3) $\forall n, m \in \mathbb{N}\ (Sn = Sm \to n = m)$
(P4) $\forall n \in \mathbb{N}\ Sn \neq 0$
(P5) $P[n \leftarrow 0] \wedge \forall k \in \mathbb{N}\ (P[n \leftarrow k] \to P[n \leftarrow Sk]) \to \forall n \in \mathbb{N}\ P$

上で S はある関数を表している。(P2) は先の集合と関数の表記を使って述べれば $S \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ と同義になる。(P4) は 0 が S の像にならない，すなわち，$S^{-1}\{0\} = \emptyset$ と言うことであり，(P3) は S が単射であることを主張している。(P5) において P は自然数 n に関する任意の述語を表す。また，記法 $P[n \leftarrow \alpha]$ は式 P 中の自由変数 n のすべてに α を代入した式を表す。これも集合の記法を用いて $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P\}$ とすれば，$k \in A$ と $P[n \leftarrow k]$ が同値になるので，(P5) は

$$\forall A \in 2^{\mathbb{N}}\ ((0 \in A \wedge \forall k \in A\ Sk \in A) \to A = \mathbb{N})$$

と表現できる。

実は，Sx は x の succesor と呼ばれ，次の数 $x + 1$ を意図しているので，(P1) – (P5) はいずれも自然数の基本的な性質である。(P5) は，特に**数学的帰納法の原理**と呼ばれ,「0 から始め，順次 1 を足していくことですべての自然数が尽くされる」という自然数の全体の持つ重要な性質を表現している。実際，$\forall n \in \mathbb{N}\ P$ が成り立つことを証明するために

- $P[n \leftarrow 0]$ を示す
- 自然数 k に対して，$P[n \leftarrow k]$ を仮定して $P[n \leftarrow k + 1]$ を示す

ということが行なわれるが，この証明法を**数学的帰納法** (mathematical induction) と呼ぶ。

上では，数学的帰納法は，自然数に関する述語を証明する方法として導入したが，次のような形で，自然数に関する関数などを定義する方法としても用いられる。f を定義したい関数とする。

- $f0$ の値を定義する
- 自然数 k に対して，fk の値を使って $f(k + 1)$ の値を定義する

これで任意の自然数 n に対して fn の値を定義したことになる。このような定義の仕方を帰納的定義と呼ぶ。実際，自然数の和と積は，次のように帰納的に定義される。

定義 5.1 (自然数の和)**.**

$$x + 0 \stackrel{\text{def}}{=} x, \quad x + Sy \stackrel{\text{def}}{=} S(x + y)$$

定義 5.2 (自然数の積)**.**

$$x0 \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad x(Sy) \stackrel{\text{def}}{=} x + xy$$

[10] 1.1 節で述べたように 0 を自然数に入れるか入れないかは数学書によって見解が分かれるが，本質的な問題ではないので，本ノートでは一貫して 0 は自然数という立場をとる。この結果，ペアノの公理自体や数に関する概念の定義などに類書とは微妙な差異が生ずるので，注意されたい。

問題 5.3 (帰納法).
$\mathbb{N}$ における加法と乗法の次の性質を，上の定義だけを用いて，数学的帰納法で証明せよ。

(a) 加法の結合律，交換律
(b) 乗法の結合律，交換律
(c) 加法と乗法の分配律
(d) $1 \overset{\mathrm{def}}{=} S0$ が乗法の単位元であること
(e) 加法の相殺律: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}\ (x + z = y + z \to x = y)$
(f) $\forall x, y \in \mathbb{N}\ (x + y = 0 \to x = y = 0)$

定義 5.4 (自然数の順序).

$$x \leqq y \overset{\mathrm{def}}{\iff} \exists z \in \mathbb{N} x + z = y$$

問題 5.5.
上で定義した $\leqq$ が $\mathbb{N}$ 上の全順序になることを示せ

問題 5.6.
空でない $\mathbb{N}$ の部分集合は最小元を持つことを示せ。

数学的帰納法には，いくつか変形が存在する。例えば起点を 0 でなく一般の整数 i に変えて

- $P[n \leftarrow i]$ を示す
- i 以上の整数 k に対して，$P[n \leftarrow k]$ を仮定して $P[n \leftarrow k+1]$ を示す

ということをすれば，$\forall n \in \mathbb{Z}\ (n \geq i \to P)$ の証明ができたことになる。頻繁に使われる有用な変形に，**累積帰納法** (course of values induction) と呼ばれる次のものがある。

- $\forall k \in \mathbb{N}\ (k < n \to P[n \leftarrow k])$ を仮定して P を示す

これにより $\forall n \in \mathbb{N}\ P$ の証明ができたことになる。定義の場合にも，累積帰納法に相当する変形がある。

- n より小さい k に対する fk の値をすべて使って fn の値を定義する

問題 5.7.
P を自然数 n に関する述語とする。通常の帰納法の原理 (e) から累積帰納法の原理，すなわち

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (\forall k \in \mathbb{N}\ (k < n \to P[n \leftarrow k]) \to P) \to \forall n \in \mathbb{N}\ P$$

を示せ。(ヒント: n に関する述語 $Q \overset{\mathrm{def}}{\iff} \forall k \in \mathbb{N}\ (k < n \to P[n \leftarrow k])$ を考え，累積帰納法の仮定を用いて，通常の帰納法の原理により $\forall k \in \mathbb{N}\ Q$ を証明することを考えよ。)

問題 5.8.
次を証明せよ。

(a) $\forall x, y, z \in \mathbb{N}(x < y \Longrightarrow x + z < y + z)$
(b) $\forall x, y, z \in \mathbb{N}(x < y \land z \neq 0 \Longrightarrow xz < yz)$
(c) 乗法の相殺律: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}\ (xz = yz \land z \neq 0 \to x = y)$

問題 5.9.
n 個のものから i 個のものを選び出す組合せの総数を $\binom{n}{i}$ と書き，その値は n に関して次のように帰

納的に定義できる。

$$\binom{0}{i} \overset{\text{def}}{=} [i=0] \quad , \binom{n+1}{i} \overset{\text{def}}{=} \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}$$

次を数学的帰納法によって証明せよ。

(a) $\forall i \notin [0..n]\ \binom{n}{i} = 0$
（i が負の数であったり n より大きかったりするのは，組合せ論的には無意味のように思われるかもしれないが，上ではきちんと定義されていることに注意されたい。）

(b) $\forall n \in \mathbb{N}\ \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

(c) $\forall n, m \in \mathbb{N}\ \binom{n+m}{m} = \dfrac{(n+m)!}{m!n!}$

(d) $\forall n, m \in \mathbb{N}\ \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$

自然数以外に関する述語や自由変数を 2 つ以上持つ述語についても，しばしば数学的帰納法は有用だ。例えば P を $x, y, \ldots, z$ に関する述語とし，$\forall x, y, \ldots, z\ P$ を証明したいとする。もし $x, y, \ldots, z$ の各値に対しある自然数 $f(x, y, \ldots, z)$ が定まるなら，自然数 n に関する述語 $Q \overset{\text{def}}{\iff} \forall x, y, \ldots, z\ (f(x, y, \ldots, z) = n \to P)$ を考えると，直接 $\forall x, y, \ldots, z\ P$ を証明する代わりに $\forall n \in \mathbb{N}\ Q$ を数学的帰納法で示しても目的は達成される。この場合，具体的な帰納法は次のような手順になる。

- $\forall x, y, \ldots, z\ (f(x, y, \ldots, z) = 0 \to P)$ を示す。
- 任意の自然数 k に対して，$\forall x, y, \ldots, z\ (f(x, y, \ldots, z) = k \to P)$ を仮定して $\forall x, y, \ldots, z\ (f(x, y, \ldots, z) = k+1 \to P)$ を示す。

あるいは，累積帰納法を使えば，次のようになる。

- 任意の自然数 k に対して，$\forall x, y, \ldots, z\ (f(x, y, \ldots, z) < k \to P)$ を仮定して $\forall x, y, \ldots, z\ (f(x, y, \ldots, z) = k \to P)$ を示す。

自由変数 2 つ持つような述語に対しては，上のような手法がうまくいかない場合でも 2 重帰納法を使えることがある。典型的な使い方としては，例えば P を自然数 m, n に関する述語とするとき論理式 $\forall m, n \in \mathbb{N}\ P$ を証明するために，

- $\forall n \in \mathbb{N}\ P[m \leftarrow 0]$ を示す。そのために
  - $P[m \leftarrow 0][n \leftarrow 0]$ を示す。
  - 自然数 k に対して，$P[m \leftarrow 0][n \leftarrow k]$ を仮定して $P[m \leftarrow 0][n \leftarrow k+1]$ を示す
- 自然数 j に対して，$\forall n \in \mathbb{N}\ P[m \leftarrow j]$ を仮定して，$\forall n \in \mathbb{N}\ P[m \leftarrow j+1]$ を示す。そのために
  - $P[m \leftarrow j+1][n \leftarrow 0]$ を示す。
  - 自然数 k に対して，$P[m \leftarrow j+1][n \leftarrow k]$ を仮定して $P[m \leftarrow j+1][n \leftarrow k+1]$ を示す

という手順になる。パラメタがもっと増えれば，3 重，4 重帰納法も考えられる。要するに，数学的帰納法が入れ子になっているだけで特別なものではないが，関数定義のために 2 重帰納法を使うと，ちょっと驚くような関数が定義できる。その例として Ackermmann 関数を挙げよう。それは，次のように定義される自然数上の 2 変数関数 $A(m, n)$ だ。

- $\forall n \in \mathbb{N}\ A(0, n) \overset{\text{def}}{=} n+1$
- $\forall m \in \mathbb{N}\ A(m+1, 0) \overset{\text{def}}{=} A(m, 1)$

- $\forall m, n \in \mathbb{N}\ A(m+1, n+1) \stackrel{\text{def}}{=} A(m, A(m+1, n))$

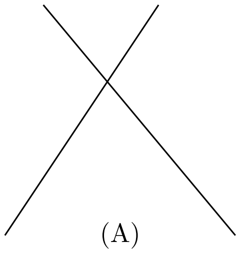
最初の式は普通の帰納的定義の場合と変わらないが，次の 2 つの式が 2 重帰納的である。つまり $A(m+1, 0)$ や $A(m+1, n+1)$ の値を決めるのにすべての自然数 k について $A(m, k)$ が定義されていることを前提にしているし，さらに $A(m+1, n+1)$ の値を決めるには $A(m+1, n)$ の値も必要になる。この関数が驚くべき早さで増加することは，次の問題から分かるだろう。

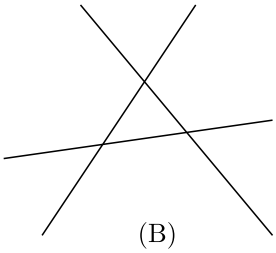
問題 5.10.
Ackermann 関数 $A(m, n)$ について次を証明せよ。

(a) $A(1, n) = n + 2\ (= 2 + (n + 3) - 3)$
(b) $A(2, n) = 2n + 3\ (= 2(n + 3) - 3)$
(c) $A(3, n) = 8 \cdot 2^n - 3\ (= 2^{n+3} - 3)$

さらに，$A(4, n)$, $A(5, n)$ などがどんな数になるか考えてみよ。

問題 5.11.
平面上に n 本の直線があり，どの 2 直線も並行でなく，どの 3 直線も 1 点で交わらないとする。これらの直線によって，仕切られる領域の数を L_n とする。例えば，図 (A), (B) のように $L_2 = 4$，$L_3 = 7$ だ。


(A)


(B)

(a) L_n の帰納的定義を与えよ。
(b) L_n を n で表す式を書け。

問題 5.12.
上の問題を 3 次元で論ぜよ。つまり空間に n 枚の平面があり，どの 3 平面も 1 点で交わり，どの 4 平面も共有点を持たないとする。これらの平面によって仕切られる領域の数について調べよ。さらに一般の m 次元について同様な問題を論ぜよ。つまり m 次元空間に n 枚の $m-1$ 次元超平面があり，そのどの m 個も 1 点で交わり，どの $m+1$ 個も共有点を持たないとするとき，それらの超平面よって仕切られる領域の数 $L(m, n)$ の (2 重) 帰納的定義を与えよ。

5.2 整数

次のような $\mathbb{N}^2$ 上の同値関係 $\sim$ を考え，整数の全体 $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{N}^2/\sim$ として定義することができる。

$$\langle p_1, m_1 \rangle \sim \langle p_2, m_2 \rangle \stackrel{\text{def}}{\iff} p_1 + m_2 = p_2 + m_1$$

このとき $[\langle p, 0 \rangle]$ を $+p$ と記し，$[\langle 0, m \rangle]$ を $-m$ と記す。さらに $+p$ は単に p と書くこともあり，$p \in \mathbb{N}$ と同一視される。

また，$\mathbb{N}$ 上の加法，乗法，順序は，次のように $\mathbb{Z}$ 上に拡張される。

$$
\begin{aligned}
[\langle p_1, m_1\rangle] + [\langle p_2, m_2\rangle] &\overset{\text{def}}{=} [\langle p_1 + p_2, m_1 + m_2\rangle] \\
[\langle p_1, m_1\rangle][\langle p_2, m_2\rangle] &\overset{\text{def}}{=} [\langle p_1p_2 + m_1m_2, p_1m_2 + m_1p_2\rangle] \\
[\langle p_1, m_1\rangle] \leqq [\langle p_2, m_2\rangle] &\overset{\text{def}}{\iff} p_1 + m_2 \leqq m_1 + p_2
\end{aligned}
$$

問題 5.13.
上の $\mathbb{Z}$ における加法，乗法について次を示せ。

(a) 加法，乗法が well-defined である。
(b) 加法の結合律，交換律。
(c) 乗法の結合律，交換律。
(d) 加法と乗法の分配律。
(e) $0 \overset{\text{def}}{=} [\langle 0, 0\rangle]$ が加法の単位元であり，$+p = [\langle p, 0\rangle]$ と $-p = [\langle 0, p\rangle]$ が互いに加法の逆元である。
(f) $+1 \overset{\text{def}}{=} [\langle 1, 0\rangle]$ が乗法の単位元である。
(g) $\forall x, y \in \mathbb{Z}(-x)y = x(-y) = -(xy)$
(h) $\forall x \in \mathbb{Z}x0 = 0x = 0$

問題 5.14.
上の $\mathbb{Z}$ における順序について次を示せ。

(a) 順序が well-defined である。
(b) $\forall p, m \in \mathbb{N}\ (0 \leqq [\langle p, m\rangle] \leftrightarrow m \leqq p)$，$\forall x \in \mathbb{Z}\ (0 \leqq x \leftrightarrow -x \leqq 0)$
(c) $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}\ (x < y \leftrightarrow x + z = y + z)$，$\forall x, y \in \mathbb{Z}\ (x > 0 \land y > 0 \to xy > 0)$

問題 5.15.
$\int$ における相殺律

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}\ (xz = yz \land z \neq 0 \to x = y)$$

を示せ。

5.3 有理数

次のような $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ 上の同値関係 $\approx$ を考え，有理数の全体 $\mathbb{Q}$ を商集合 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})/\approx$ として定義することができる。

$$\langle n_1, d_1\rangle \approx \langle n_2, d_2\rangle \overset{\text{def}}{\iff} n_1d_2 = n_2d_1$$

このとき $[\langle n, d\rangle]_\approx$ を単に n/d と記す（ただし，この場合の / は，ただの区切り記号であるから，nd^{-1} を意味する演算と混同してはならない)。また，特に $n/1$ を単に n と書き，$n \in \mathbb{Z}$ と同一視する。

また，$\mathbb{Z}$ 上の加法，乗法，順序は，次のように $\mathbb{Z}$ 上に拡張される。

$$
\begin{aligned}
n_1/d_1 + n_2/d_2 &\overset{\text{def}}{=} (n_1d_2 + d_1n_2)/d_1d_2 \\
n_1/d_1 \cdot n_2/d_2 &\overset{\text{def}}{=} n_1n_2/d_1d_2 \\
n_1/d_1 \leqq n_2/d_2 &\overset{\text{def}}{\iff} n_1d_2 \leqq d_1n_2
\end{aligned}
$$

問題 5.16.
上の $\approx$ が $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ 上の同値関係であることを示せ。

問題 5.17.
上の $\mathbb{Q}$ における加法，乗法について次を示せ。

(a) 加法，乗法は，well-defined であり，$\mathbb{Z}$ 上の演算の拡張になっている。
(b) 加法の結合律，交換律。
(c) 乗法の結合律，交換律。
(d) 加法と乗法の分配律。
(e) $0 \overset{\text{def}}{=} 0/1$ が加法の単位元であり，n/d と $(-n)/d$ が互いに加法の逆元である。
(f) $1 \overset{\text{def}}{=} 1/1$ が乗法の単位元である。
(g) $0 \overset{\text{def}}{=} 0/1$ を除くすべての $\mathbb{Q}$ の元が乗法逆元を持つ。

問題 5.18.
上の $\mathbb{Q}$ 上の順序 $\leqq$ について次を示せ。

(a) 順序 $\leqq$ が well-defined であり，$\mathbb{Z}$ 上の順序の拡張になっている。
(b) $\leqq$ は $\mathbb{Q}$ 上の全順序である。
(c) $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}\ (x < y \leftrightarrow x + z < y + z)$，$\forall x, y \in \mathbb{Q}\ (x > 0 \wedge y > 0 \rightarrow xy > 0)$

問題 5.19 (有理数の稠密性)**.**
$\forall x, y \in \mathbb{Q}\ (x < y \rightarrow \exists z \in \mathbb{Q}\ x < z < y)$ を示せ。

5.4 実数の構成（コーシー列による）

次の条件を満たす有理数列 $x \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ を（有理数の）**コーシー列**（Cauchy sequence，基本列）と呼ぶ。

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists i_0 \in \mathbb{N}\ \forall i, j \in \mathbb{N}\ (i > i_0 \wedge j > i_0 \rightarrow |xi - xj| < 1/n)$$

（有理数の）コーシー列の全体を $\mathrm{Cs}\mathbb{Q}$ と書くことにし，次のように定義される同値関係 $\cong$ による商集合 $(\mathrm{Cs}\mathbb{Q})/\cong$ として $\mathbb{R}$ を定義する。

$$x \cong y \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} \forall n \in \mathbb{N}\ \exists i_0 \in \mathbb{N}\ \forall i \in \mathbb{N}\ (i > i_0 \rightarrow |xi - yi| < 1/n)$$

$q \in \mathbb{Q}$ とするとき，定値数列の同値類 $[\lambda i \in \mathbb{N}\ q]_{\cong} \in \mathbb{R}$ を $q \in \mathbb{Q}$ と同一視すれば，$\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ に埋め込まれる。

また，$\mathbb{Q}$ 上の加法，乗法，順序は次のように $\mathbb{R}$ 上に拡張される。

$$\begin{aligned}
[x] + [y] &\overset{\text{def}}{=} [\lambda i \in \mathbb{N}\ xi + yi] \\
[x] \cdot [y] &\overset{\text{def}}{=} [\lambda i \in \mathbb{N}\ (xi)(yi)] \\
[x] \leqq [y] &\overset{\text{def}}{=} \forall n \in \mathbb{N}\ \exists i_0 \in \mathbb{N}\ \forall i \in \mathbb{N}\ (i > i_0 \rightarrow xi - yi < 1/n)
\end{aligned}$$

問題 5.20.
上の $\cong$ が $\mathrm{Cs}\mathbb{Q}$ 上の同値関係であることを示せ。

問題 5.21.
任意のコーシー列が有界であることを示せ。すなわち，

$$\forall x \in \mathrm{Cs}\mathbb{Q}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall i \in \mathbb{N}\ |xi| < n$$

問題 5.22.
上の $\mathbb{R}$ における加法，乗法について次を示せ。

(a) 加法，乗法は，well-defined であり，$\mathbb{Q}$ 上の演算の拡張になっている。
(b) 加法の結合律，交換律。
(c) 乗法の結合律，交換律。
(d) 加法と乗法の分配律。
(e) $0 \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda i \in \mathbb{N}\ 0]$ が加法の単位元であり，$[x]$ の逆元は $-x = [\lambda i \in \mathbb{N}\ -(xi)]$ である。
(f) $1 \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda i \in \mathbb{N}\ 1]$ が乗法の単位元である。
(g) $0 \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda i \in \mathbb{N}\ 0]$ を除くすべての $\mathbb{R}$ の元が乗法逆元を持つ。

問題 5.23.
上の $\mathbb{R}$ 上の順序 $\leqq$ について次を示せ。

(a) 順序 $\leqq$ が well-defined であり，$\mathbb{R}$ 上の順序の拡張になっている。
(b) $\leqq$ は $\mathbb{R}$ 上の全順序である。
(c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ (x < y \leftrightarrow x + z = y + z)$，$\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x > 0 \wedge y > 0 \rightarrow xy > 0)$

問題 5.24.
$\forall x \in \mathrm{Cs}\mathbb{Q}\ |[x]| = [\lambda i \in \mathbb{N}\ |xi|]$ を示せ。

問題 5.25 (実数の稠密性)**.**
$\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x < y \rightarrow \exists z \in \mathbb{R}\ x < z < y)$ を示せ。

定理 5.26 (アルキメデスの公理)**.**
$\forall x \in \mathbb{R}\ (x > 0 \rightarrow \forall y \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\ y < nx)$ である。

問題 5.27.
アルキメデスの公理は $\forall x \in \mathbb{R}\ (x > 0 \rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ 1/n < x)$ と同値であることを示し，それを証明せよ。

実数列 $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は，条件

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists i_0 \in \mathbb{N}\ \forall i, j \in \mathbb{N}\ (i > i_0 \wedge j > i_0 \rightarrow |xi - xj| < 1/n)$$

を満たすとき，**コーシー列**と呼ぶ。また，実数 a に対して，

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists i_0 \in \mathbb{N}\ \forall i \in \mathbb{N}\ (i > i_0 \rightarrow |xi - a| < 1/n)$$

を満たすとき，**極限**（limit） a に**収束**（converge）するという。

定理 5.28 (実数の完備性)**.**
コーシー列はある実数に収束する。

定理 5.29 (実数の完備性)**.**
$\mathbb{R}$ の空でない部分集合が上に有界であれば上限を持つ。下に有界であれば下限を持つ。