Boolean valued higher order logics

池上 大祐

東京電機大学

平成 27 年 11 月 28 日

ロジシャンのみなさんへ

以下、ZFC の下で議論します。

非ロジシャンのみなさんへ

さっきのスライドは気にしないでください。

一階述語論理について

一階述語の古典論理は、様々な良い性質を持つ：

一階述語論理について

一階述語の古典論理は、様々な良い性質を持つ：

定理 (ゲーデルの完全性定理)

命題が恒真（valid）であることと、証明可能（provable）であることは同値。

一階述語論理について

一階述語の古典論理は、様々な良い性質を持つ：

定理 (ゲーデルの完全性定理)

命題が恒真（valid）であることと、証明可能（provable）であることは同値。

系

恒真（valid）である命題（をコードする自然数）全体は Σ^0_1 集合。

一階述語論理について

一階述語の古典論理は、様々な良い性質を持つ：

定理 (ゲーデルの完全性定理)

命題が恒真（valid）であることと、証明可能（provable）であることは同値。

系

恒真（valid）である命題（をコードする自然数）全体は Σ^0_1 集合。

定理 (コンパクト性定理)

命題からなる集合 Γ がモデルを持つには、Γ の任意有限部分集合がモデルを持てばよい。

一階述語論理について

一階述語の古典論理は、様々な良い性質を持つ：

定理 (ゲーデルの完全性定理)

命題が恒真（valid）であることと、証明可能（provable）であることは同値。

系

恒真（valid）である命題（をコードする自然数）全体は Σ^0_1 集合。

定理 (コンパクト性定理)

命題からなる集合 Γ がモデルを持つには、Γ の任意有限部分集合がモデルを持てばよい。

定理 (レーヴェンハイム・スコーレム・タルスキの定理)

言語が可算のとき、命題からなる集合 Γ がモデルを持てば、Γ の可算モデルが存在する。

二階述語論理：二つの意味論

二階述語の古典論理には、主に二つの意味論がある：

二階述語論理：二つの意味論

二階述語の古典論理には、主に二つの意味論がある：

1. ヘンキン意味論：二階述語の標準的な構造のうち、内包公理（Comprehension Scheme）を満たすもの（ヘンキン構造）のみを考慮する。

   一階述語論理とほとんど同じ。

二階述語論理：二つの意味論

二階述語の古典論理には、主に二つの意味論がある：

1. ヘンキン意味論：二階述語の標準的な構造のうち、内包公理（Comprehension Scheme）を満たすもの（ヘンキン構造）のみを考慮する。

   一階述語論理とほとんど同じ。

2. 完全意味論（タルスキ意味論）：二階述語の標準的な構造の中でも、$(X, \mathcal{P}(X), \ldots)$ という形をしたもののみを考察する。

   一階述語論理と全然違う。

二階述語論理 ctd.：ヘンキン意味論

定理 (ヘンキンの完全性定理)

命題が恒真（valid）であることと、証明可能（provable）であることは同値。

系

恒真（valid）である命題（をコードする自然数）全体は Σ^0_1 集合。

二階述語論理 ctd.：ヘンキン意味論

定理 (ヘンキンの完全性定理)

命題が恒真（valid）であることと、証明可能（provable）であることは同値。

系

恒真（valid）である命題（をコードする自然数）全体は Σ^0_1 集合。

コンパクト性定理やレーヴェンハイム・スコーレム・タルスキの定理も成り立つ。

二階述語論理 ctd.：ヘンキン意味論

定理 (ヘンキンの完全性定理)

命題が恒真（valid）であることと、証明可能（provable）であることは同値。

系

恒真（valid）である命題（をコードする自然数）全体は Σ^0_1 集合。

コンパクト性定理やレーヴェンハイム・スコーレム・タルスキの定理も成り立つ。

ポイント：ヘンキン構造の二階部分を“一階部分”だと思うと、ヘンキン意味論は一階述語論理の標準的な意味論に帰着できる。

二階述語論理 ctd..：完全意味論（タルスキ意味論）

完全意味論はチョーふくざつ：

定理 (Väänänen)

恒真（valid）である命題（をコードする自然数）全体は、集合論の言語で Π_2-完全になる。

よって、通常の意味での完全性定理は成り立たない。

二階述語論理 ctd..：完全意味論（タルスキ意味論）

完全意味論はチョーふくざつ：

定理 (Väänänen)

恒真（valid）である命題（をコードする自然数）全体は、集合論の言語で Π_2-完全になる。

よって、通常の意味での完全性定理は成り立たない。

完全意味論はチョーぱわふる：

定理 (Folklore?)

ある二階述語論理の命題 ϕ に対して

$$M \vDash \phi \iff M \text{ の一階部分は } (\mathbb{N}, +, \times, 0, 1) \text{ と同型}$$

となる。

コンパクト性定理が成り立たないこともわかる。

今日の話

二階述語論理にブール値意味論を導入し、ブール値意味論と完全意味論を比べる。

今日の話

二階述語論理にブール値意味論を導入し、ブール値意味論と完全意味論を比べる。

時間があれば、高階述語論理のブール値意味論と現代集合論の関係について話す。

ちょっと寄り道：無限論理について

通常、述語論理で考える命題内の変数の数は有限個。

“and” や “or” も、有限個の命題たちに対してしか定義しない。

ちょっと寄り道：無限論理について

通常、述語論理で考える命題内の変数の数は有限個。

“and” や “or” も、有限個の命題たちに対してしか定義しない。

無限個にしてみたらどうなるか？

ちょっと寄り道 ctd.：順序数・基数

無限にもいろいろありまして…。

ちょっと寄り道 ctd.：順序数・基数

無限にもいろいろありまして…。

無限順序数：$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega, \omega+\omega+1 \ldots$

ちょっと寄り道 ctd.：順序数・基数

無限にもいろいろありまして…。

無限順序数：$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega, \omega+\omega+1 \ldots$

無限基数：$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots$

ちょっと寄り道 ctd.. : 無限論理 $\mathcal{L}^1_{\kappa\lambda}$ と $\mathcal{L}^2_{\kappa\lambda}$

κ, λ を無限基数とする。

一階述語の無限論理 $\mathcal{L}^1_{\kappa\lambda}$ を、
各々の論理式の中に

a) κ 未満個の論理式 $(\phi_\alpha \mid \alpha < \gamma)$ に対する "and"（$\bigwedge_{\alpha<\gamma} \phi_\alpha$）と "or"（$\bigvee_{\alpha<\gamma} \phi_\alpha$）

b) λ 未満個の変数 $(x_\alpha \mid \alpha < \gamma)$ に対する量化子（"$\forall_{\alpha<\gamma}\ x_\alpha$" や "$\exists_{\alpha<\gamma}\ x_\alpha$"）

が出現するのを認めた論理とする。

ちょっと寄り道 ctd.. : 無限論理 $\mathcal{L}^1_{\kappa\lambda}$ と $\mathcal{L}^2_{\kappa\lambda}$

κ, λ を無限基数とする。

一階述語の無限論理 $\mathcal{L}^1_{\kappa\lambda}$ を、
各々の論理式の中に

a) κ 未満個の論理式 $(\phi_\alpha \mid \alpha < \gamma)$ に対する "and"（$\bigwedge_{\alpha<\gamma} \phi_\alpha$）
と "or"（$\bigvee_{\alpha<\gamma} \phi_\alpha$）

b) λ 未満個の変数 $(x_\alpha \mid \alpha < \gamma)$ に対する量化子（"$\forall_{\alpha<\gamma}\ x_\alpha$" や
"$\exists_{\alpha<\gamma}\ x_\alpha$"）

が出現するのを認めた論理とする。

二階述語の無限論理 $\mathcal{L}^2_{\kappa\lambda}$ も同様に定義できる。

だいぶ寄り道？：無限論理 $\mathcal{L}^1_{\kappa\lambda}$ の例

a) $\kappa = \lambda = \aleph_0$ のとき：$\mathcal{L}^1_{\kappa\lambda}$ は通常の一階述語論理

だいぶ寄り道？：無限論理 $\mathcal{L}^1_{\kappa\lambda}$ の例

a) $\kappa = \lambda = \aleph_0$ のとき：$\mathcal{L}^1_{\kappa\lambda}$ は通常の一階述語論理
b) $\kappa = \aleph_\omega, \lambda = \aleph_0$ のとき
$(\phi_\alpha \mid \alpha < \aleph_\omega)$ を論理式の列とし、各 $n < \omega$ に対して

$$\psi_n = \bigvee_{\alpha < \aleph_n} \phi_\alpha$$

とする。このとき、$(\psi_n \mid n < \omega)$ も論理式の列で、

$$\bigvee_{n \in \omega} \psi_n$$

も論理式。

だいぶ寄り道？：無限論理 $\mathcal{L}^1_{\kappa\lambda}$ の例

a) $\kappa = \lambda = \aleph_0$ のとき：$\mathcal{L}^1_{\kappa\lambda}$ は通常の一階述語論理
b) $\kappa = \aleph_\omega, \lambda = \aleph_0$ のとき
$(\phi_\alpha \mid \alpha < \aleph_\omega)$ を論理式の列とし、各 $n < \omega$ に対して

$$\psi_n = \bigvee_{\alpha < \aleph_n} \phi_\alpha$$

とする。このとき、$(\psi_n \mid n < \omega)$ も論理式の列で、

$$\bigvee_{n \in \omega} \psi_n$$

も論理式。
でも、これは結局、$\aleph_\omega$ 個の論理式に対する "or"

$$\bigvee_{\alpha < \aleph_\omega} \phi_\alpha$$

を考えていることと同じ。

だいぶ寄り道？ ctd.：$\aleph_0$ と $\aleph_\omega$ の違い

a) 有限個の自然数の sup はやっぱり有限

b) $\aleph_0$ 個 の $\aleph_\omega$ 未満の数の sup は $\aleph_\omega$ になりうる。

だいぶ寄り道？ ctd.：$\aleph_0$ と $\aleph_\omega$ の違い

a) 有限個の自然数の sup はやっぱり有限

b) $\aleph_0$ 個 の $\aleph_\omega$ 未満の数の sup は $\aleph_\omega$ になりうる。

a) のように、無限基数 κ に対して、

κ 未満個の κ より小さな順序数たちの sup が、再び κ より小さいとき、

κ を正則基数と呼ぶ。

だいぶ寄り道？ ctd.：$\aleph_0$ と $\aleph_\omega$ の違い

a) 有限個の自然数の sup はやっぱり有限

b) $\aleph_0$ 個の $\aleph_\omega$ 未満の数の sup は $\aleph_\omega$ になりうる。

a) のように、無限基数 κ に対して、

κ 未満個の κ より小さな順序数たちの sup が、再び κ より小さいとき、

κ を正則基数と呼ぶ。

a) $\aleph_0$ は正則基数

b) $\aleph_\omega$ は正則基数でない

だいぶ寄り道？ ctd.：無限論理とコンパクト性

以下、κ を可算でない正則基数とし、$\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}, \mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ についてのみ考える。

だいぶ寄り道？ ctd.：無限論理とコンパクト性

以下、κ を可算でない正則基数とし、$\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}, \mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ についてのみ考える。

$\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}, \mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ の論理式の意味論として、
一階述語論理の標準的な意味論と二階述語論理の完全意味論を
“無難に” 拡張したものをそれぞれ考える。

だいぶ寄り道？ ctd.：無限論理とコンパクト性

以下、κ を可算でない正則基数とし、$\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}, \mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ についてのみ考える。

$\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}, \mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ の論理式の意味論として、
一階述語論理の標準的な意味論と二階述語論理の完全意味論を
“無難に” 拡張したものをそれぞれ考える。

さて、ある基数 κ と $\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}$ や $\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ に対して、ある種のコンパクト性定理が成り立つことがあるのか？

だいぶ寄り道？ ctd.：無限論理とコンパクト性

以下、κ を可算でない正則基数とし、$\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}, \mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ についてのみ考える。

$\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}, \mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ の論理式の意味論として、

一階述語論理の標準的な意味論と二階述語論理の完全意味論を

"無難に" 拡張したものをそれぞれ考える。

さて、ある基数 κ と $\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}$ や $\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ に対して、ある種のコンパクト性定理が成り立つことがあるのか？

答え：ZFC では決定できない！

だいぶ寄り道？ ctd..：コンパクト性と巨大基数

κ を可算でない正則基数とする。

定義

κ が強コンパクト基数（strongly compact cardinal）であるとは、

> $\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}$ の命題の集合 Γ が任意に与えられた時、Γ がモデルを持つには、κ 未満個のどんな Γ の部分集合もモデルを持つことが言えればよい

ということが成り立つこと。

だいぶ寄り道？ ctd..：コンパクト性と巨大基数

κ を可算でない正則基数とする。

定義

κ が強コンパクト基数（strongly compact cardinal）であるとは、

> $\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}$ の命題の集合 Γ が任意に与えられた時、Γ がモデルを持つには、κ 未満個のどんな Γ の部分集合もモデルを持つことが言えればよい

ということが成り立つこと。

このように、$\aleph_0$ が有限に対して持つ超越的な性質を、自分より小さな基数たちに対して持つ可算でない無限基数のことを、巨大基数と呼ぶ。

だいぶ寄り道？ ctd.. : コンパクト性と巨大基数

κ を可算でない正則基数とする。

定義

κ が強コンパクト基数（strongly compact cardinal）であるとは、

> $\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}$ の命題の集合 Γ が任意に与えられた時、Γ がモデルを持つには、
> κ 未満個のどんな Γ の部分集合もモデルを持つことが言えればよい

ということが成り立つこと。

このように、$\aleph_0$ が有限に対して持つ超越的な性質を、自分より小さな基数たちに対して持つ可算でない無限基数のことを、巨大基数と呼ぶ。

強コンパクト基数を初めとする巨大基数の存在は、ZFC からは証明できない。

まだ寄り道！？：$\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ と巨大基数

もう一つ、巨大基数を紹介：κ を可算でない正則基数とする。

まだ寄り道！？：$\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ と巨大基数

もう一つ、巨大基数を紹介：κ を可算でない正則基数とする。

定義

κ が拡張可能基数（extendible cardinal）であるとは、

どんな順序数 $\alpha > \kappa$ に対しても、ある順序数 β と初等埋め込み
$j\colon V_\alpha \to V_\beta$ がうまくとれて、j の臨界点が κ になる

ようにできること。

まだ寄り道！？：$\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ と巨大基数

もう一つ、巨大基数を紹介：κ を可算でない正則基数とする。

定義

κ が拡張可能基数（extendible cardinal）であるとは、

どんな順序数 $\alpha > \kappa$ に対しても、ある順序数 β と初等埋め込み
$j\colon V_\alpha \to V_\beta$ がうまくとれて、j の臨界点が κ になる

ようにできること。

定理 (Magidor)

κ を可算でない正則基数とすると、以下は同値：

1. $\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ が、$\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}$ について述べたときと同様のコンパクト性を持つ。
2. κ は拡張可能基数である。

まだ寄り道！？：$\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ と巨大基数

もう一つ、巨大基数を紹介：κ を可算でない正則基数とする。

定義

κ が拡張可能基数（extendible cardinal）であるとは、

どんな順序数 $\alpha > \kappa$ に対しても、ある順序数 β と初等埋め込み
$j \colon V_\alpha \to V_\beta$ がうまくとれて、j の臨界点が κ になる

ようにできること。

定理 (Magidor)

κ を可算でない正則基数とすると、以下は同値：

1. $\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ が、$\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}$ について述べたときと同様のコンパクト性を持つ。
2. κ は拡張可能基数である。

拡張可能なら強コンパクトだが、逆は成り立たない。

ようやく本題：二階述語論理のブール値意味論

以下、簡単のため、関係記号を有限個のみ扱うことにする（関数記号、定数記号はなし）。

また、扱う関係記号を $R_1, \cdots, R_m$ とし、各 R_i の引数を ℓ_i とする。

ようやく本題：二階述語論理のブール値意味論

以下、簡単のため、関係記号を有限個のみ扱うことにする（関数記号、定数記号はなし）。

また、扱う関係記号を $R_1, \cdots, R_m$ とし、各 R_i の引数を ℓ_i とする。

定義

ブール値構造は、以下のデータ $\left(A, \mathbb{B}, (f_i \mid 1 \leq i \leq m)\right)$ で与えられる：

1. A は空でない集合。
2. B は完備ブール代数。
3. 各 i に対して、$f_i \colon A^{\ell_i} \to \mathbb{B}$.

ようやく本題：二階述語論理のブール値意味論

以下、簡単のため、関係記号を有限個のみ扱うことにする（関数記号、定数記号はなし）。

また、扱う関係記号を $R_1, \cdots, R_m$ とし、各 R_i の引数を ℓ_i とする。

定義

ブール値構造は、以下のデータ $(A, \mathbb{B}, (f_i \mid 1 \leq i \leq m))$ で与えられる：

1. A は空でない集合。
2. B は完備ブール代数。
3. 各 i に対して、$f_i : A^{\ell_i} \to \mathbb{B}$.

$\mathbb{B} = \{0, 1\}$ のとき、ブール値構造は一階述語論理の構造と同一視できる。

ようやく本題 ctd.：二階述語論理のブール値意味論 ctd.

定義

$M = \big(A, \mathbb{B}, (f_i \mid 1 \leq i \leq m)\big)$ をブール値構造とする。

二階述語論理の論理式 ϕ と $\vec{a} \in A^{<\omega}$, $\vec{g} \in (\mathbb{B}^A)^{<\omega}$ に対し、

真偽値 $\|\phi[\vec{a}, \vec{g}]\|^M \in \mathbb{B}$ を以下のように割り当てる：

1. ϕ が "$R_i(\vec{x})$" のとき、$\|R_i(\vec{x})[\vec{a}]\|^M = f_i(\vec{a})$.
2. ϕ が "$X(x)$" のとき、$\|X(x)[a, g]\|^M = g(a)$.
3. ブール結合（"and", "or", "not" など）はご想像通り…。
4. ϕ が "$\exists x \psi$" のとき、$\|\exists x \psi[\vec{a}, \vec{g}]\|^M = \bigvee_{b \in A} \|\psi[b, \vec{a}, \vec{g}]\|^M$.
5. ϕ が "$\exists X \psi$" のとき、$\|\exists X \psi[\vec{a}, \vec{g}]\|^M = \bigvee_{h \colon A \to \mathbb{B}} \|\psi[\vec{a}, h, \vec{g}]\|^M$.

ブール値意味論と完全意味論（タルスキ意味論）

定義

二階述語論理の命題 ϕ がブール値意味論において妥当（Boolean valid）であるとは、

$$\text{どんなブール値構造 } M \text{ に対しても } \|\phi\|^M = 1_{\mathbb{B}}$$

が成り立つこと。

ブール値意味論と完全意味論（タルスキ意味論）

定義

二階述語論理の命題 ϕ がブール値意味論において妥当（Boolean valid）であるとは、

$$\text{どんなブール値構造 } M \text{ に対しても } \|\phi\|^M = 1_{\mathbb{B}}$$

が成り立つこと。

定義

$$0^2 = \{\phi \mid \phi \text{ は完全意味論において妥当}\}$$

$$0^{2b} = \{\phi \mid \phi \text{ はブール値意味論において妥当}\}$$

ブール値意味論と完全意味論（タルスキ意味論）

定義

二階述語論理の命題 ϕ がブール値意味論において妥当（Boolean valid）であるとは、

$$\text{どんなブール値構造 } M \text{ に対しても } \|\phi\|^M = 1_{\mathbb{B}}$$

が成り立つこと。

定義

$$0^2 = \{\phi \mid \phi \text{ は完全意味論において妥当}\}$$

$$0^{2b} = \{\phi \mid \phi \text{ はブール値意味論において妥当}\}$$

問い：0^2 と 0^{2b} ではどちらが複雑か？

ブール値意味論と完全意味論（タルスキ意味論）

定義

二階述語論理の命題 ϕ がブール値意味論において妥当（Boolean valid）であるとは、

$$\text{どんなブール値構造 } M \text{ に対しても } \|\phi\|^M = 1_{\mathbb{B}}$$

が成り立つこと。

定義

$$0^2 = \{\phi \mid \phi \text{ は完全意味論において妥当}\}$$

$$0^{2b} = \{\phi \mid \phi \text{ はブール値意味論において妥当}\}$$

問い：0^2 と 0^{2b} ではどちらが複雑か？

答え：ZFC では決定できない！

ブール値意味論と完全意味論（タルスキ意味論）ctd.

定理 (Väänänen, I.)

$V = \mathrm{L}$ のとき、$0^{2b} \equiv_{\mathsf{T}} 0^2$. よって、両者は同じくらい複雑。

ブール値意味論と完全意味論（タルスキ意味論）ctd.

定理 (Väänänen, I.)

$V = \mathrm{L}$ のとき、$0^{2b} \equiv_{\mathsf{T}} 0^2$.　よって、両者は同じくらい複雑。

定理 (Väänänen, I.)

巨大基数がたくさんあって、Ω 予想が成り立つとき、
0^{2b} は 0^2 よりも単純。

ブール値意味論と完全意味論（タルスキ意味論） ctd.

定理 (Väänänen, I.)

$V = \mathrm{L}$ のとき、$0^{2b} \equiv_T 0^2$. よって、両者は同じくらい複雑。

定理 (Väänänen, I.)

巨大基数がたくさんあって、Ω 予想が成り立つとき、
0^{2b} は 0^2 よりも単純。

問い：Ω 予想とは？

ブール値意味論と完全意味論（タルスキ意味論） ctd.

定理 (Väänänen, I.)

$V = \mathrm{L}$ のとき、$0^{2b} \equiv_{\mathsf{T}} 0^2$. よって、両者は同じくらい複雑。

定理 (Väänänen, I.)

巨大基数がたくさんあって、Ω 予想が成り立つとき、
0^{2b} は 0^2 よりも単純。

問い：Ω 予想とは？

答え：Ω 論理の完全性について述べた予想。

ブール値意味論と完全意味論（タルスキ意味論） ctd.

定理 (Väänänen, I.)

$V = \mathrm{L}$ のとき、$0^{2b} \equiv_{\mathsf{T}} 0^2$.　よって、両者は同じくらい複雑。

定理 (Väänänen, I.)

巨大基数がたくさんあって、Ω 予想が成り立つとき、
0^{2b} は 0^2 よりも単純。

問い：Ω 予想とは？

答え：Ω 論理の完全性について述べた予想。

問い：Ω 論理とは？

ブール値意味論と完全意味論（タルスキ意味論） ctd.

定理 (Väänänen, I.)

$V = \mathrm{L}$ のとき、$0^{2b} \equiv_T 0^2$.　よって、両者は同じくらい複雑。

定理 (Väänänen, I.)

巨大基数がたくさんあって、Ω 予想が成り立つとき、
0^{2b} は 0^2 よりも単純。

問い：Ω 予想とは？

答え：Ω 論理の完全性について述べた予想。

問い：Ω 論理とは？

答え：でぃすいずあぅとおぶざすこ〜ぷおぶでぃすと〜く…。

ブール値意味論と完全意味論（タルスキ意味論）ctd..

復習

1. 無限論理 $\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}$ がコンパクト性を持つのは、κ が強コンパクト基数のとき。
2. （Magidor）無限論理 $\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ が完全意味論においてコンパクト性を持つのは、κ が拡張可能基数のとき。

ブール値意味論と完全意味論（タルスキ意味論）ctd..

復習

1. 無限論理 $\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}$ がコンパクト性を持つのは、κ が強コンパクト基数のとき。
2. （Magidor）無限論理 $\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ が完全意味論においてコンパクト性を持つのは、κ が拡張可能基数のとき。

無限論理 $\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ にもブール値意味論を導入することができる。

ブール値意味論と完全意味論（タルスキ意味論）ctd..

復習

1. 無限論理 $\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}$ がコンパクト性を持つのは、κ が強コンパクト基数のとき。
2. （Magidor）無限論理 $\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ が完全意味論においてコンパクト性を持つのは、κ が拡張可能基数のとき。

無限論理 $\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ にもブール値意味論を導入することができる。

定理 (Väänänen, I.)

巨大基数と Ω 論理についての適切な仮定の下で、
κ が超コンパクト基数ならば、無限論理 $\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ はブール値意味論のもとでコンパクト性を持つ。

ブール値意味論と完全意味論（タルスキ意味論）ctd..

復習

1. 無限論理 $\mathcal{L}^1_{\kappa,\kappa}$ がコンパクト性を持つのは、κ が強コンパクト基数のとき。
2. （Magidor）無限論理 $\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ が完全意味論においてコンパクト性を持つのは、κ が拡張可能基数のとき。

無限論理 $\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ にもブール値意味論を導入することができる。

定理 (Väänänen, I.)

巨大基数と Ω 論理についての適切な仮定の下で、
κ が超コンパクト基数ならば、無限論理 $\mathcal{L}^2_{\kappa,\kappa}$ はブール値意味論のもとでコンパクト性を持つ。

（強コンパクト基数）$\leq$ （超コンパクト基数）$<$ （拡張可能基数）

ここまでのまとめ

一階述語の古典論理は様々な良い性質を持つ。

ここまでのまとめ

一階述語の古典論理は様々な良い性質を持つ。

二階述語論理の意味論として、ヘンキン意味論と完全意味論が考察されることが多い。

ヘンキン意味論は一階述語論理の標準的な意味論と等価だが、

完全意味論は、これらの意味論よりはるかに複雑で扱いづらい。

ここまでのまとめ

一階述語の古典論理は様々な良い性質を持つ。

二階述語論理の意味論として、ヘンキン意味論と完全意味論が考察されることが多い。

ヘンキン意味論は一階述語論理の標準的な意味論と等価だが、

完全意味論は、これらの意味論よりはるかに複雑で扱いづらい。

ブール値意味論は、ヘンキン意味論よりも複雑だが、
完全意味論よりも単純になりうることがわかった。

本題の先の話（“本当の” 本題）：ゲーデルの L の構成とロジック

定理 (Gödel)

もし ZF が無矛盾なら、ZFC+GCH も無矛盾である。

この定理を証明する際、ゲーデルは、構成可能クラス L という集合論のモデルを導入した。

本題の先の話（“本当の”本題）：ゲーデルのLの構成とロジック

定理 (Gödel)

もしZFが無矛盾なら、ZFC+GCHも無矛盾である。

この定理を証明する際、ゲーデルは、構成可能クラスLという集合論のモデルを導入した。

$$\mathrm{L}_0 = \emptyset,$$

$$\mathrm{L}_{\alpha+1} = \{X \subseteq \mathrm{L}_\alpha \mid X \text{ は一階述語論理の構造 } (\mathrm{L}_\alpha, \in) \text{ で定義可能 }\},$$

$$\mathrm{L}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathrm{L}_\alpha \quad (\gamma \text{ は極限順序数}),$$

$$\mathrm{L} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} \mathrm{L}_\alpha.$$

本題の先の話（“本当の” 本題）：ゲーデルの L の構成とロジック

定理 (Gödel)

もし ZF が無矛盾なら、ZFC+GCH も無矛盾である。

この定理を証明する際、ゲーデルは、構成可能クラス L という集合論のモデルを導入した。

$$\mathrm{L}_0 = \emptyset,$$
$$\mathrm{L}_{\alpha+1} = \{X \subseteq \mathrm{L}_\alpha \mid X \text{ は一階述語論理の構造 } (\mathrm{L}_\alpha, \in) \text{ で定義可能}\},$$
$$\mathrm{L}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathrm{L}_\alpha \quad (\gamma \text{ は極限順序数}),$$
$$\mathrm{L} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} \mathrm{L}_\alpha.$$

上の “一階述語論理” を他の論理にしたらどうなるか？

“本当の” 本題：ゲーデルの L の構成とロジック ctd.

$\mathcal{L}$ を、一階述語論理を拡張した論理で、意味論が与えられているものとする。

定義

$$\mathrm{L}_0(\mathcal{L}) = \emptyset,$$
$$\mathrm{L}_{\alpha+1}(\mathcal{L}) = \{X \subseteq \mathrm{L}_\alpha(\mathcal{L}) \mid X \text{ は } \mathcal{L} \text{ の構造 } (\mathrm{L}_\alpha(\mathcal{L}), \in) \text{ で定義可能 }\},$$
$$\mathrm{L}_\gamma(\mathcal{L}) = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathrm{L}_\alpha(\mathcal{L}) \quad (\gamma \text{ は極限順序数}),$$
$$\mathrm{L}(\mathcal{L}) = \bigcup_{\alpha\in\mathsf{On}} \mathrm{L}_\alpha(\mathcal{L}).$$

“本当の” 本題：ゲーデルの L の構成とロジック ctd.

$\mathcal{L}$ を、一階述語論理を拡張した論理で、意味論が与えられているものとする。

定義

$$\mathrm{L}_0(\mathcal{L}) = \emptyset,$$

$$\mathrm{L}_{\alpha+1}(\mathcal{L}) = \{X \subseteq \mathrm{L}_\alpha(\mathcal{L}) \mid X \text{ は } \mathcal{L} \text{ の構造 } (\mathrm{L}_\alpha(\mathcal{L}), \in) \text{ で定義可能}\},$$

$$\mathrm{L}_\gamma(\mathcal{L}) = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathrm{L}_\alpha(\mathcal{L}) \quad (\gamma \text{ は極限順序数}),$$

$$\mathrm{L}(\mathcal{L}) = \bigcup_{\alpha\in\mathsf{On}} \mathrm{L}_\alpha(\mathcal{L}).$$

例

1. $\mathcal{L}$ が一階述語論理のとき、$\mathrm{L}(\mathcal{L}) = \mathrm{L}$.
2. $\mathcal{L}$ が完全意味論を意味論とする二階述語論理のとき、$\mathrm{L}(\mathcal{L}) = \mathsf{HOD}$.

“本当の” 本題：ゲーデルのLの構成とロジック ctd..

注意

1. $\mathcal{L}$ が “強ければ強い” ほど、$\mathrm{L}(\mathcal{L})$ は大きくなる。

注意

1. $\mathcal{L}$ が "強ければ強い" ほど、L($\mathcal{L}$) は大きくなる。
2. L($\mathcal{L}$) は、二つの論理を比べるときの指標になりうる。

“本当の” 本題：ゲーデルの L の構成とロジック ctd..

注意

1. $\mathcal{L}$ が “強ければ強い” ほど、$\mathrm{L}(\mathcal{L})$ は大きくなる。
2. $\mathrm{L}(\mathcal{L})$ は、二つの論理を比べるときの指標になりうる。
3. 様々な $\mathcal{L}$ について考察することで、様々な集合論のモデル $\mathrm{L}(\mathcal{L})$ が構成できる。

L($\mathcal{L}$) と現代集合論

現代集合論において、強い巨大基数の存在下で、$\mathcal{L}$ が完全意味論を意味論とする二階述語論理のときの $\mathrm{L}(\mathcal{L}) = \mathsf{HOD}$ と集合全体のクラス V の関係について理解を深めることが重要になることが分かってきた。

L($\mathcal{L}$) と現代集合論

現代集合論において、強い巨大基数の存在下で、$\mathcal{L}$ が完全意味論を意味論とする二階述語論理のときの L($\mathcal{L}$) = HOD と集合全体のクラス V の関係について理解を深めることが重要になることが分かってきた。

よって、完全意味論についての理解を深めることが重要になる。

L($\mathcal{L}$) と現代集合論

現代集合論において、強い巨大基数の存在下で、$\mathcal{L}$ が完全意味論を意味論とする二階述語論理のときの L($\mathcal{L}$) = HOD と集合全体のクラス V の関係について理解を深めることが重要になることが分かってきた。

よって、完全意味論についての理解を深めることが重要になる。

しかし、完全意味論や HOD は分析が非常に難しい。

L($\mathcal{L}$) と現代集合論

現代集合論において、強い巨大基数の存在下で、$\mathcal{L}$ が完全意味論を意味論とする二階述語論理のときの $\mathrm{L}(\mathcal{L}) = \mathsf{HOD}$ と集合全体のクラス V の関係について理解を深めることが重要になることが分かってきた。

よって、完全意味論についての理解を深めることが重要になる。

しかし、完全意味論や HOD は分析が非常に難しい。

もう少し単純な論理 $\mathcal{L}$ についての L($\mathcal{L}$) を分析すれば何かわかるのではないか？

L($\mathcal{L}$) と現代集合論

現代集合論において、強い巨大基数の存在下で、$\mathcal{L}$ が完全意味論を意味論とする二階述語論理のときの L($\mathcal{L}$) = HOD と集合全体のクラス V の関係について理解を深めることが重要になることが分かってきた。

よって、完全意味論についての理解を深めることが重要になる。

しかし、完全意味論や HOD は分析が非常に難しい。

もう少し単純な論理 $\mathcal{L}$ についての L($\mathcal{L}$) を分析すれば何かわかるのではないか？

$\mathcal{L}$ = Boolean valued higher order logics ではどうなるだろう？

L($\mathcal{L}$) と現代集合論

現代集合論において、強い巨大基数の存在下で、$\mathcal{L}$ が完全意味論を意味論とする二階述語論理のときの $\mathrm{L}(\mathcal{L}) = \mathrm{HOD}$ と集合全体のクラス V の関係について理解を深めることが重要になることが分かってきた。

よって、完全意味論についての理解を深めることが重要になる。

しかし、完全意味論や HOD は分析が非常に難しい。

もう少し単純な論理 $\mathcal{L}$ についての $\mathrm{L}(\mathcal{L})$ を分析すれば何かわかるのではないか？

$\mathcal{L}$ = Boolean valued higher order logics ではどうなるだろう？

実はここまでが前置き（てへぺろ）。

Boolean valued higher order logics

1 以上の整数 n に対して、$\mathcal{L}$ が n 階述語論理にブール値意味論を与えたものとしたときの集合論のモデル $\mathrm{L}(\mathcal{L})$ を L^{nb} で表す。

また、$\mathcal{L}$ が Ω 論理であるときの $\mathrm{L}(\mathcal{L})$ を L^{Ω} で表す。

Boolean valued higher order logics

1 以上の整数 n に対して、$\mathcal{L}$ が n 階述語論理にブール値意味論を与えたものとしたときの集合論のモデル $\mathrm{L}(\mathcal{L})$ を L^{nb} で表す。

また、$\mathcal{L}$ が Ω 論理であるときの $\mathrm{L}(\mathcal{L})$ を L^{Ω} で表す。

定理 (I.)

巨大基数と Ω 論理についての適切な仮定の下で以下が成り立つ：

1. $\mathrm{L}^{2b} \subseteq \mathrm{L}^{3b} = \cdots = \mathrm{L}^{nb} = \cdots = \mathrm{L}^{\Omega}$.

Boolean valued higher order logics

1 以上の整数 n に対して、$\mathcal{L}$ が n 階述語論理にブール値意味論を与えたものとしたときの集合論のモデル $\mathrm{L}(\mathcal{L})$ を L^{nb} で表す。

また、$\mathcal{L}$ が Ω 論理であるときの $\mathrm{L}(\mathcal{L})$ を L^{Ω} で表す。

定理 (I.)

巨大基数と Ω 論理についての適切な仮定の下で以下が成り立つ：

1. $\mathrm{L}^{2b} \subseteq \mathrm{L}^{3b} = \cdots = \mathrm{L}^{nb} = \cdots = \mathrm{L}^{\Omega}$.
2. L^{Ω} は、ZFC+GCH のモデルで、V のどんな set forcing extension で定義しても変わらない。

   また、L^{Ω} は、現在の記述集合論・内部モデル理論で得られている全ての情報について "知っている"。