

正則連分数 (Perron の公式に向けて)

2021 年 5 月 6 日

1 導入

a_0 を整数とする. また, $a_1, \dots, a_N$ を正整数とする. このとき,

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_N}}}} \quad (1.1)$$

の形の分数を (有限) 正則連分数と呼ぶ. なお, 正則とは分子が 1 となっていることを意味する. 式 (1.1) を $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_N]$ と略す. ξ を実数とする. 最初は簡単のために, ξ が無理数であるとする. 実は, ξ は正則連分数の極限として表すことができる (詳細は後述):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_N}}}} \quad (1.2)$$

(1.2) を以下のように書き, これも (無限) 正則連分数と呼ぶ.

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}} \quad (1.3)$$

また, (1.3) を $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ のように書く. 実数の正則連分数展開は, 実数の有理数による近似と関連がある. 本ファイルの目標は, その関連を紹

介することである。これまでのファイルで見てきたように、解析数論、特に超越数論には有理数による近似を調べることが必要である。本ファイルの命題すべてを証明するとページが長くなる。興味がある学生は、例えば、「無理数と超越数、塩川宇賢著、森北出版株式会社」参照、本ファイルもこの本の証明を基本にしている。その他連分数に関する記述がある数論の本は多い。以下、簡単のため本ファイルでは正則連分数を単に連分数と呼ぶ。

2 有限連分数の分子、分母に関する公式

便宜上、本章では、 $a_0, a_1, \dots$ は変数と見なし、しかも取り得る値は整数とは限らないものとする。有限連分数の例を挙げる (1 番目の例は、整数部分という意味ではない):

$$[a_0] = \frac{a_0}{1}, [a_0; a_1] = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1}, [a_0; a_1, a_2] = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1}. \quad (2.1)$$

上記の式は、有限連分数の定義から通分をすることにより確かめることができる。一般に分子、分母を表すことが本章の目標である。天下りのであるが、 $a_0, a_1, \dots, a_n$ に関する以下の多項式 $p_n = p_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ と $q_n = q_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ を、以下のように定義する。まず、

$$p_{-1} := 1, q_{-1} := 0, \quad p_0 = a_0, q_0 = 1 \quad (2.2)$$

と定義する (p_{-1}, q_{-1} は記号の簡略化のため、便宜上定義する)。また、 $n \geq 1$ のとき、 p_n, q_n を以下のように帰納的に定義する:

$$p_n := a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \quad (2.3)$$

まず、 $n = 0$ の場合を考える。 p_0, q_0 の定義より、 p_0, q_0 が (2.1) における分子、分母を表している。 $n = 1, 2$ のときも (2.3) より機械的に検証できる。一般に、 p_n, q_n が $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ の分子、分母を表していることを証明するが、補題を紹介する (この補題自体、特に (1) が重要):

補題 2.1. (1) $n \geq 0$ のとき、 $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ が成り立つ。

(2) $n \geq 1$ のとき、 $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$ が成り立つ。

※ a_n がすべて整数のとき、 p_n, q_n も整数だが、(1) より p_n, q_n は互いに素。

証明. p_n, q_n の定義 (2.2) と (2.3) を用いると、数学的帰納法により機械的に証明できるので省略。 □

定理 2.1. $n \geq 0$ のとき, 以下が成立する:

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}. \quad (2.4)$$

証明. n に関する帰納法により, (2.4) を示す. $n = 0$ および $n = 1$ のとき, (2.4) が成立することは既に述べてある. 以下, $n \geq 1$ に対して (2.4) が成立することを仮定し, $n + 1$ に対しても (2.4) が成立することを証明する. 証明のアイデア:

$$[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}] = \left[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right]. \quad (2.5)$$

帰納法の仮定, および $n \geq 1$ より (2.3) が使えるので, 以下が成立する:

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \quad (2.6)$$

(2.6) を a_n に関する恒等式とみなせる. なお, $p_{n-1}, p_{n-2}, q_{n-1}, q_{n-2}$ は a_n に依存しないことに注意. よって, (2.6) において a_n を $a_n + 1/a_{n+1}$ に変更することで, 以下を証明できる:

$$\begin{aligned} \left[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right] &= \frac{(a_n + 1/a_{n+1})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + 1/a_{n+1})q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{(a_{n+1}a_n + 1)p_{n-1} + a_{n+1}p_{n-2}}{(a_{n+1}a_n + 1)q_{n-1} + a_{n+1}q_{n-2}} \\ &= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \stackrel{\text{式 (2.3)}}{=} \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}. \end{aligned}$$

したがって, (2.5) より, $n + 1$ に対しても (2.4) が成立する. □

3 連分数の収束

この章では, 整数 a_0 および正整数の列 $a_1, \dots, a_n, \dots$ に対して, $[a_0; a_1, \dots, a_n] = p_n/q_n$ が収束することを証明する. まず, q_n の定義から, 数学的帰納法を用いることで, 以下の事実を機械的に証明できる:

$$q_0 = 1 \leq q_1 < q_2 < q_3 < \dots,$$

また, $n \geq 2$ のとき, $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq 2q_{n-2}$ である.

よって, $q_n \geq (\sqrt{2})^{n-1}$. 補題 2.1(1) より, 以下が成立する: $n \geq 1$ のとき,

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}q_n}. \quad (3.1)$$

特に, (3.1) について, n に関する和をとる. $p_0/q_0 = a_0$ に注意すると,

$$\frac{p_n}{q_n} - a_0 = \frac{1}{q_0 q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n}. \quad (3.2)$$

$n \geq 2$ のとき $q_n \geq (\sqrt{2})^{n-1}$ より (3.2) の右辺は収束. よって p_n/q_n は収束.

補足 3.1.

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

が成立する (証明略, 補題 2.1 を用いる).

4 実数の正則連分数の計算方法

実数の連分数展開のアルゴリズム: $x \in \mathbb{R}$ に対して, $[x]$ と $\{x\}$ をそれぞれ x の整数部分, 小数部分とする. ※ $\{x\} = x - [x] \in [0, 1)$.

- $a_0 = [\xi]$.
 $\xi \in \mathbb{Z}$ ならば終了 ($\xi = [a_0]$). $\xi \notin \mathbb{Z}$ ならば次の step.
- $\xi = a_0 + \{\xi\}$ ($0 < \{\xi\} < 1$).
 $\xi_1 := 1/\{\xi\} (> 1)$. $\Rightarrow \xi = a_0 + \frac{1}{\xi_1}$.
 $a_1 := [\xi_1]$. $\xi_1 \in \mathbb{Z}$ ならば終了 ($\xi = [a_0; a_1]$).
 $\xi_1 \notin \mathbb{Z}$ ならば次の step($\xi = [a_0; \xi_1]$).
- $\xi_2 := 1/\{\xi_1\} > 1$. $\Rightarrow \xi = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\xi_2}}$
 $a_2 := [\xi_2]$. $\xi_2 \in \mathbb{Z}$ ならば終了 ($\xi = [a_0; a_1, a_2]$).
 $\xi_2 \notin \mathbb{Z}$ ならば次の step($\xi = [a_0; a_1, \xi_2]$).
- 以降も帰納的に ξ_{n-1} から a_n, ξ_n を定義する ($\xi_{n-1} \notin \mathbb{Z}$).
 $\xi_n := 1/\{\xi_{n-1}\} > 1$. $\Rightarrow \xi = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, \xi_n]$.
 $a_n := [\xi_n]$. $\xi_n \in \mathbb{Z}$ ならば終了 ($\xi = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] \in \mathbb{Q}$).

$\xi_n \notin \mathbb{Z}$ ならば次の step.

特に, $\xi \notin \mathbb{Q}$ の場合, 有限回の step で終了しない. 特に, 無限列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ が構成される.

—— 本章以降における記号 ——

実数 ξ に対して, a_n, ξ_n を本章で与えられたアルゴリズムにより計算されたものとする. また, この $a_0, a_1, \dots$ に基づき p_n, q_n を (2.1) と (2.2) のように帰納的に定める. p_n/q_n を ξ の第 n 次 (主) 近似連分数と呼ぶ. ただし, 証明の都合上 $\xi = [a_0; a_1, \dots, a_{n+1}, \xi_{n+2}]$ のように扱う場合があるのでその場合のみ例外的に 2 章のように a_{n+2} を変数のように扱う (必要に応じて 2 章を復習).

命題 4.1. $\xi \in \mathbb{Q}$ の場合, 実数の連分数展開のアルゴリズムは有限回の step で終了する.

証明. $\xi = c/d (c, d \in \mathbb{Z}, d > 0)$ とする. $\xi \notin \mathbb{Z}$ の場合に証明すればよい. c を d で割った商を a_0 , 余りを d_1 とする ($1 \leq d_1 < d$).

さて, $\xi = c/d = a_0 + d_1/d$ より $a_0 = \lfloor \xi \rfloor$ である. すると, 以下が成立する:

$$\frac{c}{d} = a_0 + \frac{d_1}{d} = a_0 + \frac{1}{\frac{d}{d_1}}, \quad \xi_1 = \frac{d}{d_1}$$

Step を進めると, 分母が減少することがわかった. 分母は正整数なので, 有限 step で終了する. □

次に, 無理数 ξ に対して, 連分数展開のアルゴリズムにより ξ に収束する連分数を構成できることを証明する. そのための準備を行う (後に述べる理由から次の補題自体重要).

補題 4.1. $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とする. このとき, $n \geq 0$ に対して以下が成立する:

$$\xi - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(q_{n+1} + q_n/\xi_{n+2})}$$

証明.

$$[a_0; a_1, \dots, a_{n+1}, a_{n+2}] = \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} = \frac{a_{n+2}p_{n+1} + p_n}{a_{n+2}q_{n+1} + q_n}$$

は, a_{n+2} の恒等式としても成立. よって, 以下が成立する (連分数のアルゴリズムにて, $\xi = [a_0; a_1, \dots, a_{n+1}, \xi_{n+2}]$ であることを述べた):

$$\xi = [a_0; a_1, \dots, a_{n+1}, \xi_{n+2}] = \frac{\xi_{n+2}p_{n+1} + p_n}{\xi_{n+2}q_{n+1} + q_n}. \quad (4.1)$$

よって, (4.1) により $\xi - p_n/q_n$ を通分し (単純計算なので結果のみを記述する), 補題 2.1 を適用すると, 成立する:

$$\begin{aligned} \xi - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{\xi_{n+2}(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1})}{q_n(\xi_{n+2}q_{n+1} + q_n)} \\ &= \underbrace{\frac{\xi_{n+2}(-1)^n}{q_n(\xi_{n+2}q_{n+1} + q_n)}}_{\text{補題 2.1}} \end{aligned}$$

よって, 補題 4.1 が証明された. $\square$

$n \geq 2$ のとき $q_n \geq (\sqrt{2})^{n-1}$ であった. さらに, $\xi_{n+2} > 1$ より, 補題 4.1 から $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n/q_n = \xi$ が従う. 以上を次の命題にまとめる:

命題 4.2. $\xi \notin \mathbb{Q}$ の場合, 実数の連分数展開のアルゴリズムで定めた数列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ に対し, $\xi = [a_0; a_1, \dots]$ が成立.

定理 4.1. $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とする. このとき, 以下が成立する:

- (1) $n \geq 0$ ならば, $\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$.
- (2) (Lagrange) $a/b \in \mathbb{Q}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \geq 1$) とする.
 $\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}$ ならば, $(\exists n \geq 0) \text{ s.t. } a/b = p_n/q_n$.

証明. (1) のみ証明する. 補題 4.1 より, 以下が成立する:

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_nq_{n+1}} \leq \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}.$$

$\square$

定理 4.1(1) より, $|\xi - p_n/q_n|$ の大きさは, ξ の連分数展開における a_{n+1} の大きさに依存. 実は, 補題 4.1 より, Perron の公式が導かれる (本プリント 6 章参照).

5 計算例

「実数を整数部分と小数部分に分け, 小数部分の逆数を取る」という操作を繰り返すことにより, 実数の連分数を計算できる.

例 5.1. $\xi = \frac{37}{13}$

$$\xi = 2 + \frac{11}{13} = 2 + \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_1 = \frac{13}{11}.$$

$$\xi_1 = 1 + \frac{2}{11} = 1 + \frac{1}{\xi_2}, \quad \xi_2 = \frac{11}{2}.$$

$$\xi_2 = 5 + \frac{1}{2} = 5 + \frac{1}{\xi_3}. \quad \text{ここで, } \xi_3 = 2 \in \mathbb{Z} \text{ となったので step 終了.}$$

$$\xi = 2 + \frac{1}{\xi_1} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\xi_2}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}}.$$

※ ξ, ξ_1, ξ_2, ξ_3 の分母分子の整数は, ユークリッドの互除法に対応している.
 $37 = 2 \cdot 13 + 11, 13 = 1 \cdot 11 + 2, 11 = 5 \cdot 2 + 1.$

補足 5.1. 例 5.1 に関して, $2 = 1 + \frac{1}{1}$ であることを利用すると, 以下の 2 通りの表示が存在する:

$$\xi = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}.$$

一般に有理数 ξ に対して, $\xi = [a_0 : a_1, \dots, a_N] = [a_0, a_1, \dots, -1 + a_N, 1]$ とちょうど 2 通りの連分数による表示方法が存在する. ただし, $N \geq 1$ ならば $a_N \geq 2$ とする. 有理数に対して, この 2 通り以外の (正則) 連分数表示法がないことも証明可能である (証明は割愛).

一方, 無理数 ξ に対しては, (正則) 連分数としての表示方法がちょうど 1 通りに定まり, それ以外の表示法がないことも証明可能である (証明は割愛).

例 5.2. $\xi = \sqrt{2}.$

$$\xi = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

$$\xi_1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{\xi_2}, \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

以下繰り返し. ※ $\xi_2 = \xi_3 = \dots = \sqrt{2} + 1$ となる.

$$\begin{aligned} \xi &= 1 + \frac{1}{\xi_1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\xi_2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\xi_3}}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}} \\ &= [1; 2, 2, 2, \dots]. \end{aligned}$$

※周期的な連分数に関する記法:

$[b_0; b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_r, c_1, \dots, c_r, c_1, \dots, c_r, \dots]$ ($c_1, \dots, c_r$ が繰り返される)
を以下のように書く. $[b_0; b_1, \dots, b_k, \overline{c_1, \dots, c_r}]$.

この記法を用いると, $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$ である.

実は, 一般に次の事実が成立する:

定理 5.1 (Lagrange). $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とする. このとき, ξ の連分数展開が周期的 ($[b_0; b_1, \dots, b_k, \overline{c_1, \dots, c_r}]$ の形) となる必要十分条件は, ξ が 2 次の代数的数となることである.

6 Perron の公式

本章では, ξ は $0 < \xi < 1$ を満たす無理数であるとする. また, ξ の (正則) 連分数展開は $\xi = [0; a_1 a_2, \dots]$ であるとする. また, p_n/q_n , ξ_n については, 前章までと同じ記号を使用する.

定理 6.1 (Perron の公式). $n \geq 0$ ならば, 以下が成立する:

$$q_n^2 \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{[0; a_n, \dots, a_1] + a_{n+1} + [0; a_{n+2}, a_{n+3}, \dots]}. \quad (6.1)$$

※ $n = 0$ のとき, $[0; a_n, \dots, a_1] = 0$ とみなす.

補足 6.1. n を増加させると, (6.1) の右辺の分母は, n の添え字をずらしたものとなる. つまり, 有理近似の誤差の逆数 $q_n^{-2}|\xi - p_n/q_n|^{-1}$ は, 数列 $(a_n)_{n \geq 0}$ の添え字のずらしと関連がある. かなり大雑把に述べると, 上記のように添え字のずらしにより記述されるような量は, 記号力学系と呼ばれる分野を応用することができる. 有理近似の誤差は, 記号力学系を用いて研究がされている (Lagrange spectrum, Markov spectrum).

Perron の公式の証明. 補題 4.1 より,

$$q_n^2 \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_{n+1}/q_n + 1/\xi_{n+2}}$$

となる. $1/\xi_{n+2} = [0; a_{n+2}, a_{n+3}, \dots]$ より, $q_{n+1}/q_n = [0; a_n, \dots, a_1] + a_{n+1}$ であることを示せばよい. これは, q_n に関する定義式 (2.2) と (2.3) から導くことができる. □