

広義一様収束の定義に関する補足

2023年7月25日

本ファイルでは、級数の広義一様収束の定義に関する補足を行う。 S を $\mathbb{C}$ の部分集合とする。関数 f および $f_n (n \in \mathbb{N})$ は S 上定義された複素関数とする。

$$|f|_{\infty}^{(S)} := \sup\{|f(z)| \mid z \in S\}$$

とおく。 $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ が S 上 f に一様収束するとは、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| f - \sum_{n \in \mathbb{N}, n \leq N} f_n \right|_{\infty}^{(S)} = 0$$

が成立することであった。なお、 D が $\mathbb{C}$ における領域である場合を考える。 $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ が D 上 f に広義一様収束するとは、以下が成立することであった： S を D の任意のコンパクト部分集合としたとき、 $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ が S 上 f に一様収束する。特に、 $f_n (n \in \mathbb{N})$ が D における正則関数である場合、 f も D における正則関数である。また、任意の $z \in D$ に対して、

$$\frac{d}{dz} \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{d}{dz} f_n(z) \right)$$

が成立する。つまり、項別微分可能である。

数論では、 $f_n (n \in \mathbb{N})$ が有理型関数の場合も扱う必要がある。その際、 f_n が極を持ちうるために広義一様収束の定義を少し修正する必要がある。さて、改めて D は $\mathbb{C}$ における領域であり、 $f_n (n \in \mathbb{N})$ は D における有理型関数とする。 $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ が D 上広義一様収束するとは、以下が成立することである：

S を D の任意のコンパクト部分集合とする. このとき, S に依存してある正の整数 R が存在して, $f_n (n \geq R)$ は S 上正則である. さらに, S 上 $\sum_{n \geq R} f_n$ はある関数 g に一様収束する. g は S 上の正則関数の一様収束先であるため, S において g は正則である. よって, S において

$$f(z) = \sum_{n < R} f_n + \sum_{n \geq R} f_n = \sum_{n < R} f_n + g$$

とおくと, $f(z)$ は S における有理型関数である. さらに, $f(z)$ の値は, S の取り方に依存せず, z によってのみ一意的に定まる. S は D における任意のコンパクト部分集合であったため, f は D において定義される. この f を $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ と定義する. すると, f は D 上有理型関数である. 上記の状況を, $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ が f に D 上広義一様収束するという. また, このとき, 項別微分可能である. つまり,

$$\frac{d}{dz} \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{d}{dz} f_n(z) \right)$$

が成立する.