

代数的な整関数は多項式

2023年8月4日

本ファイルでは、代数的な整関数は多項式に限ることを証明する。ここで、複素関数 $f(z)$ が整関数とは、 $f(z)$ が $\mathbb{C}$ 上で正則となることである。また、複素関数 $f(z)$ が代数的な複素関数とは、以下が成立することである：少なくとも一つがゼロ多項式ではない $A_d(z), A_{d-1}(z), \dots, A_0(z) \in \mathbb{C}[z]$ が存在して、

$$A_d(z)f(z)^n + A_{d-1}(z)f(z)^{n-1} + \dots + A_0(z) = 0 \quad (1)$$

が任意の $z \in \mathbb{C}$ に関して成立する。

まず、Liouville の定理およびその証明を思い出す。 $f(z)$ は有界な整関数とする。このとき、 $f(z)$ は定数関数である。証明は、 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の係数 a_n に関する表示式

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

を用いればよい。実際、 $f(z)$ は有界であり、

$$M = \sup\{|f(z)| \mid z \in \mathbb{C}\} (< \infty)$$

とおく。すると、 $n \geq 1$ のとき、

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{M}{R^{n+1}} |dz| = \frac{M}{R^n} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

となるため、 $a_n = 0$ であるからである。さて、同様の観察により、以下が成立する。

$f(z)$ は整関数であるとする. ある正定数 M および D が存在して, 以下が成立すると仮定する: 十分に大きい任意の実数 R および $z \in \mathbb{C}$ で $|z| > R$ を満たすものに対して,

$$|f(z)| \leq M|z|^D. \quad (2)$$

このとき, $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ である.

さて, 以下代数的な整関数 $f(z)$ は多項式であることを示す. $f(z)$ は関係式 (1) を満たすと仮定する. $A_d(z) \neq 0$ としても一般性を失わない. このとき, 正定数 c および D が存在して, 以下を満たす: 十分に大きい任意の実数 R および $z \in \mathbb{C}$ で $|z| > R$ を満たすものに対して, $|A_d(z)| > c$ かつ

$$\sum_{n=0}^{d-1} |A_n(z)| \leq |z|^D.$$

以下, (2) を証明する. $|f(z)| \geq 1$ の場合を考えればよい. (1) より, 以下がわかる:

$$\begin{aligned} c|f(z)|^d &\leq |A_d(z)f(z)^d| \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^{d-1} -A_n(z)f(z)^n \right| \leq |f(z)|^{d-1} \sum_{n=0}^{d-1} |A_n(z)| \\ &\leq |f(z)|^{d-1} |z|^D. \end{aligned}$$

以上により,

$$|f(z)| \leq c^{-1}|z|^D$$

である. 以上により, $f(z)$ は多項式である.

追記: 以下の事実も同様に証明できるとの指摘を, セミナー中に筑波大学の 大島氏から受けた.

$f(z)$ を $\mathbb{C}$ 上定義された有理型関数とする. (特にある整関数 $g(z), h(z)$ が存在して, $f(z) = g(z)/h(z)$ である.)

さて, $f(z)$ が代数的ならば, $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ である.

証明の概略: $f(z)$ が整関数である場合と同様に, (2) が成立することを示せる.

※まず, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ から $f(z)$ の極を除いた領域で (2) が成立する. 特に $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ に $f(z)$ の極は存在しない. なぜならば, a が $f(z)$ の極であれば, $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$ となるためである.

さて, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ には $f(z)$ の極は高々有限個である. よって, ある $Q(z) \in \mathbb{C}[z] \setminus \{0\}$ が存在して, $f(z)Q(z)$ は整関数である. また, $f(z)$ が代数的であることから, $f(z)Q(z)$ も代数的である. したがって, $f(z)Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ であるため, $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ である.