無理数・超越数に関するプレレクチャー

金子 元

2024 年 9 月 9 日

無理数性の判定法

※本ファイルは「無理数と超越数 (塩川宇賢著)」を参照した.

有理数について

$\xi = a/b$ (a,b は整数, $b \neq 0$) とする. このとき, ξ にのみ依存する正定数 $c(\xi)$ が存在して, 以下を満たす: ξ とは異なる任意の有理数を p/q (p,q は整数, $q \neq 0$) とする. このとき, $|\xi - p/q| > c(\xi)/|q|$, つまり, $|q\xi - p| > c(\xi)$ が成り立つ.

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{aq-bp}{bq}\right| \geq \frac{1}{|bq|} > \frac{c(\xi)}{|q|}.$$ ただし $c(\xi) = \frac{1}{2|b|}$.

※ $a/b \neq p/q$ より, $aq - bp$ は 0 ではない整数.

系 (1 日目の $\zeta(3)$ に対する無理数性の証明にも, この系が基本)

$\xi \in \mathbb{R}$ とする. 以下を満たす整数の列 $(p_n)_{n\geq 0}$, および 0 ではない整数の列 $(q_n)_{n\geq 0}$ が存在すると仮定する: 無限に多くの n に対して $\xi \neq p_n/q_n$ であり, かつ $\lim_{n\to\infty}(q_n\xi - p_n) = 0$. このとき, $\xi \notin \mathbb{Q}$ である.

超越数論における基本的なアイディア

0 ではない整数の絶対値は 1 以上.

無理数性, 超越性の証明手順

ξ が有理数 (あるいは代数的数) と仮定する. ξ から補助的な数 η を構成する.
Step 1. $\eta \neq 0$ を示す (最も難しい step).
Step 2. $|\eta|$ の上からの評価式を証明 (主に解析的手法).
Step 3. $|\eta|$ の下からの評価式を証明 (主に代数的手法).
Step 4. Step 2 と Step 3 から矛盾を導く.

本ファイルでは e の無理数性を証明する.
π の無理数性に関しては"ゼロ点の位数の大きい多項式" を利用することにより, Step 2 と Step 3 を改良する. 位数の重要性については, 本ファイル後半も参照.
※ Padé 近似 (2 日目午前), 線形関数方程式の解と超越数 (3 日目), Mahler 関数の超越性理論 (4 日目) において重要.

無理数性の証明の例: 自然対数の底 e

$e=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ である. $e=a/b$ (a,b は正整数) と仮定.

Step 1: 正整数 N に対して, $\eta_N=e-\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}$ とおく. $\eta_N=\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n!}>0.$

Step 2: $\eta_N<\dfrac{1}{(N+1)!}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^m}=\frac{2}{(N+1)!}.$

Step 3: $p_N=\sum_{n=0}^{N}(N!)/(n!)\in\mathbb{Z}$, $q_N=N!$ とおく.

Step 1 により, $\eta_N=\dfrac{a}{b}-\dfrac{p_N}{q_N}=\dfrac{aq_N-bp_N}{bq_N}\geq\dfrac{1}{bq_N}=\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{N!}.$

Step 4. Step 2, Step 3 より, $\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{N!}\leq\eta_N<\dfrac{2}{(N+1)!}.$

したがって, $N+1<2b$. 十分大きい N に対して矛盾.

Liouville の不等式

Liouville の不等式 (1844)

実数 ξ は d 次の代数的数とする $(d \geq 1)$. すると, ξ にのみ依存する正定数 $c(\xi)$ が存在して, 以下を満たす:
$p/q(p,q$ は整数, $q \neq 0)$ は任意の有理数であるとする.
$\xi \neq p/q$ ならば, $\left|\xi - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{c(\xi)}{|q|^d}$ が成り立つ.
※ $d \geq 2$ ならば, 自動的に $\xi \neq p/q$.
※ $d = 1$ のときは既に示した.

ξ の最小多項式を $P_\xi(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ と書く.
ただし, $a_d \geq 1$ かつ $\gcd(a_d, a_{d-1}, \ldots, a_1, a_0) = 1$ とする.
例えば, $\xi = 1/\sqrt{7}$ のとき, $P_\xi(X) = 7X^2 - 1$.

Liouville の不等式の証明 (その 1)

$P_\xi(X) = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$: ξ の最小多項式 ($d \geq 2$ の場合を考える).
$p/q \in \mathbb{Q}$. 目標: $|\xi - p/q| \geq c(\xi)/|q|^d$.
$c(\xi) \leq 1$ となるように $c(\xi)$ を定めるので, $|\xi - p/q| \leq 1$ の場合を扱えばよい.
※ $|P_\xi(p/q)|$ の上からの評価式と下からの評価式を比較する.
Step 1. p/q は ξ の共役ではないので, $|P_\xi(p/q)| \neq 0$.
Step 2. 上からの評価:

$P_\xi(X)$ の $X = \xi$ におけるテイラー展開を $P_\xi(X) = \sum_{j=1}^{d} b_j (X-\xi)^j$ とおく. ※ $P_\xi(\xi) = 0$.

$c(\xi) = \min\left\{1, \frac{1}{\sum_{j=1}^d |b_j|}\right\}$ とおく. $c(\xi) \leq (\sum_{j=1}^d |b_j|)^{-1}$ より, $\sum_{j=1}^d |b_j| \leq (c(\xi))^{-1}$.

$$\left|P_\xi\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq \left|\xi - \frac{p}{q}\right| \sum_{j=1}^{d} |b_j| \left|\xi - \frac{p}{q}\right|^{j-1} \leq \left|\xi - \frac{p}{q}\right| \sum_{j=1}^{d} |b_j| \leq \frac{1}{c(\xi)} \left|\xi - \frac{p}{q}\right|.$$

Liouville の不等式の証明 (その 2)

復習

$P_\xi(X) = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$: ξ の最小多項式 ($d \geq 2$).
$p/q \in \mathbb{Q}$. 目標: $|\xi - p/q| \geq c(\xi)/|q|^d$.
Step 1. $\xi \neq p/q$ より, $|P_\xi(p/q)| \neq 0$.
Step 2. $|P_\xi(p/q)|$ の上からの評価: $\left| P_\xi\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq \frac{1}{c(\xi)}\left|\xi - \frac{p}{q}\right|$.

Step 3. $|P_\xi(p/q)|$ の下からの評価: Step 1 により, 以下が成立する.

$$\left| P_\xi\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{|a_d p^d + \cdots + a_1 p q^{d-1} + a_0 q^d|}{|q|^d} \geq \frac{1}{|q|^d}.$$

Step 4. Step 2 と Step 3 より, $\frac{1}{|q|^d} \leq \left| P_\xi\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq \frac{1}{c(\xi)}\left|\xi - \frac{p}{q}\right|$.

Liouville の不等式を応用した超越性の証明

$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n!}$ は超越数である.

ξ が d 次の代数的数であると仮定して矛盾を導く.

Step 1: 正整数 N に対して, $\eta_N = \xi - \sum_{n=0}^{N} 10^{-n!}$ とおく. $\eta_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} 10^{-n!} > 0$.

Step 2: $\eta_N < \dfrac{1}{10^{(N+1)!}} \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^m} = \dfrac{2}{10^{(N+1)!}}$.

Step 3: $p_N = \sum_{n=0}^{N} (10^{N!})/(10^{n!}) \in \mathbb{Z}$, $q_N = 10^{N!}$ とおく.

Liouville の不等式と Step 1 により, $\eta_N = \left| \xi - \dfrac{p_N}{q_N} \right| \geq \dfrac{c(\xi)}{q_N^d}$.

Step 4. $10^{(N+1)!} = q_N^{N+1}$ に注意すると, $\dfrac{c(\xi)}{q_N^d} \leq \eta_N < \dfrac{2}{q_N^{N+1}}$.

したがって, $q_N^{N+1-d} < 2(c(\xi))^{-1}$. 十分大きい N に対して矛盾.

Liouville 数

Liouville 数の定義と性質

ξ を実数とする. 以下の性質が成り立つとき ξ が Liouville 数であるという:
任意の正整数 m に対して, $0 < \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^m}$ を満たす有理数 p/q が無限に多く存在する.
前ページの証明法と同様に, 任意の Liouville 数は超越数であることを証明できる.
例えば, $\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n!}$ は Liouville 数である.

代数的数に対する記号の導入

有理数 $a/b \neq 0$ に対する $|a/b| \geq 1/|b|$ を代数的数 α に一般化したものが基本不等式.
α を代数的数とし, $P_\alpha(X) \in \mathbb{Z}[X]$ を α の最小多項式とする. $P_\alpha(X)$ が monic(最高次係数が 1) のとき, α は代数的整数であった.

記号

α を r 次の代数的数とする. $P_\alpha(X) = a_r(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_r)$ とする.
(1) $\overline{|\alpha|} = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_r|\}$ を α のハウスと呼ぶ. 例: $\overline{|2-\sqrt{2}|} = 2+\sqrt{2}$.
性質: α, β が代数的数のとき $\overline{|\alpha+\beta|} \leq \overline{|\alpha|} + \overline{|\beta|}$, $\overline{|\alpha\beta|} \leq \overline{|\alpha|}\,\overline{|\beta|}$.
(2) $\mathrm{den}(\alpha) = \min\{m \in \mathbb{Z}, m \geq 1 \mid m\alpha\text{は代数的整数}\}$ を α の分母と呼ぶ.
例: $\mathrm{den}(1/\sqrt{7}) = 7$. α, β が代数的数のとき $\mathrm{den}(\alpha+\beta) \leq \mathrm{den}(\alpha)\mathrm{den}(\beta)$, $\mathrm{den}(\alpha\beta) \leq \mathrm{den}(\alpha)\cdot\mathrm{den}(\beta)$. 応用上は以下の評価を用いる:
正整数 R に対して, $R\alpha, R\beta$ が代数的整数ならば, $R\alpha + R\beta$, $R^{n+m}\alpha^n\beta^m (n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ も代数的整数. 特に, $\mathrm{den}(\alpha+\beta) \leq R$, $\mathrm{den}(\alpha^n\beta^m) \leq R^{n+m}$.

基本不等式

$\overline{|\alpha|} = \max\{|\alpha'| \mid \alpha'$は α の共役$\}$, $\overline{|\alpha+\beta|} \leq \overline{|\alpha|} + \overline{|\beta|}$, $\overline{|\alpha\beta|} \leq \overline{|\alpha|}\,\overline{|\beta|}$.
$\mathrm{den}(\alpha) = \min\{m \in \mathbb{Z}, m \geq 1 \mid m\alpha$は代数的整数$\}$.

基本不等式

$K \subset \mathbb{C}$ は $\mathbb{Q}$ の D 次拡大 $(1 \leq D < \infty)$ とする．$\alpha \in K$ は 0 ではないとする．
このとき，$\log|\alpha| \geq -2D\max\{\log\overline{|\alpha|}, \log\mathrm{den}(\alpha)\}$ が成立する．

α の次数を $r(\leq D)$ とする．$\log\mathrm{den}(\alpha) \geq 0$ より $\log|\alpha| \geq -2r\max\{\log\overline{|\alpha|}, \log\mathrm{den}(\alpha)\}$ を示せばよい．α の共役を $\alpha_j (j = 1, \ldots, r)$ とする．$\mathrm{den}(\alpha)\alpha$ は代数的整数で，その共役は $\mathrm{den}(\alpha)\alpha_j (j = 1, \ldots, r)$ である．よって，$\alpha \neq 0$ より，以下が成立する:

$$1 \leq \left|\prod_{j=1}^{r} \mathrm{den}(\alpha)\alpha_j\right| = (\mathrm{den}(\alpha))^r \overline{|\alpha|}^{r-1}|\alpha| \leq (\max\{\mathrm{den}(\alpha), \overline{|\alpha|}\})^{2r}|\alpha|.$$

特に，$|\alpha| \geq (\max\{\mathrm{den}(\alpha), \overline{|\alpha|}\})^{-2r}$.

基本不等式の応用例: 詳細は報告集をご覧ください.

Mahler, 1929

d を 2 以上の整数とする. α は代数的数であり, $0 < |\alpha| < 1$ であるとする.
このとき, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{d^k}$ は超越数である.
※対比: $\sum_{k=0}^{\infty} 10^{-d^k} (\alpha = 1/10)$ と $\sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k!}$.
Liouville のアイディアだけでは $\sum_{k=0}^{\infty} 10^{-d^k}$ の超越性を証明できない.

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{d^k}$ とおく. $f(z)$:Fredholm 級数, (1 変数)Mahler 関数の典型例.
観察 (関数等式): $f(z^d) = \sum_{k=0}^{\infty} (z^d)^{d^k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{d^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} z^{d^k} = f(z) - z$.
証明のアイディア. Step 1(" 0 ではないことの証明"): $f(z)$ が超越関数 (代数関数ではない関数) であることを利用. $f(z)$ が超越関数であることの証明は報告集参照.
Step 2(" 上からの評価"): $f(z)^i$ の線形結合により, $z = 0$ の位数を大きくする.
Step 3(" 下からの評価"): 関数等式を利用する.

補助関数の構成

$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^{d^k}$, $0<|\alpha|<1$. α と $\beta := f(\alpha)$ が代数的数と仮定. $K := \mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ とおく.
事実 (証明は報告集参照): $A_0(z), A_1(z), \ldots, A_\ell(z) \in \mathbb{C}[z]$ の少なくとも一つが 0 ではないならば, $\sum_{i=0}^{\ell} A_i(z) f(z)^i \neq 0$ (ベキ級数環 $\mathbb{C}[[z]]$ の元として 0 ではない).
$g(z)=\sum_{j=0}^{\infty} g_j z^j \in \mathbb{C}[[z]] \setminus \{0\}$ に対して, $\mathrm{ord}\, g(z) = \min\{j \geq 0 \mid g_j \neq 0\}$ と書く.

補助関数 $E_\ell(z)$

ℓ を正整数とする. このとき, 以下を満たす $P_0(z), P_1(z), \ldots, P_\ell(z) \in \mathbb{Z}[z]$ が存在する:

1. $P_0(z), \ldots, P_\ell(z)$ の少なくとも一つは 0 ではない. さらに, いずれも次数が ℓ 以下.
2. $E_\ell(z) := \sum_{i=0}^{\ell} P_i(z) f(z)^i (\neq 0)$, $m(\ell) := \mathrm{ord}\, E_\ell(z)$ とおくと, $m(\ell) > \ell^2$.

証明: $0 \leq i \leq \ell$ に対して, $P_i(z) = \sum_{j=0}^{\ell} a_{i,j} z^j$ とおく.
$\mathrm{ord}\, E_\ell(z) > \ell^2$ は, 変数 $a_{i,j} (0 \leq i, j \leq \ell)$ に関する整数係数斉次連立一次方程式.
変数の個数 $= (\ell+1)^2 > \ell^2 + 1 =$ 式の個数より, 非自明な整数解が存在. □

0 でないことの証明と上からの評価

復習

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{d^k}$. $0 < |\alpha| < 1$. 正整数 ℓ: 十分大きなものを固定.
$E_\ell(z) = \sum_{i=0}^{\ell} P_i(z) f(z)^i \neq 0$, $m(\ell) = \mathrm{ord}\ E_\ell(z) > \ell^2$.

k: 正整数 (ℓ に依存して十分大きくすることを考える.)
$\eta_{\ell,k} = E_\ell(\alpha^{d^k})$ とおく.
$z = 0$ の近傍で $E_\ell(z) = b_{m(\ell)}^{(\ell)} z^{m(\ell)} + O(z^{m(\ell)+1})$ ($\exists b_{m(\ell)}^{(\ell)} \in \mathbb{C}$, $b_{m(\ell)}^{(\ell)} \neq 0$).
よって, k を (ℓ に依存して) 十分に大きくとると, 以下が成り立つ:
$0 \neq |\eta_{\ell,k}| = |E_\ell(\alpha^{d^k})| < 2\left|b_{m(\ell)}^{(\ell)}(\alpha^{d^k})^{m(\ell)}\right| < 2\left|b_{m(\ell)}^{(\ell)}\right| \cdot |\alpha|^{d^k \ell^2}$.
以下, $c_1, c_2, \ldots$ は ℓ にも k にも依存しない正定数.
$c_1(\ell), c_2(\ell), \ldots$ は ℓ には依存するが k には依存しない正定数.
本ページの結論: $0 \neq |\eta_{\ell,k}| < c_1(\ell)|\alpha|^{d^k \ell^2}$(スライド 2 ページ後に利用).

ハウスと分母の評価※ $\boxed{\gamma_1+\gamma_2} \leq \boxed{\gamma_1}+\boxed{\gamma_2}$, $\boxed{\gamma_1\gamma_2} \leq \boxed{\gamma_1}\,\boxed{\gamma_2}$.

復習

$\boxed{\gamma} = \max\{|\gamma'| \mid \gamma'$ は γ の共役 $\}$, $\mathrm{den}(\gamma) = \min\{n \in \mathbb{Z}, n \geq 1 \mid n\gamma$ は代数的整数 $\}$.
$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{d^k}$, $f(z^d) = f(z) - z$.
$0 < |\alpha| < 1$. 仮定: α と $\beta = f(\alpha)$ は代数的数. $K := \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.
正整数 ℓ: 十分大きなものを固定.
$E_\ell(z) = \sum_{i=0}^{\ell} P_i(z) f(z)^i$. 多項式 $P_0(z), \ldots, P_\ell(z) \in \mathbb{Z}[z]$ は ℓ に依存し, 次数が ℓ 以下.
k: 正整数 (ℓ に依存して十分大きくする). $\eta_{\ell,k} = E_\ell(\alpha^{d^k}) = \sum_{i=0}^{\ell} P_i(\alpha^{d^k}) f(\alpha^{d^k})^i$.

各 $0 \leq i \leq \ell$ に対して, $\boxed{P_i(\alpha^{d^k})} \leq c_2(\ell) c_2^{d^k \ell}$.
$f(\alpha^{d^k}) = \underbrace{f(\alpha)}_{\beta} - (\alpha + \alpha^d + \cdots + \alpha^{d^{k-1}}) \in K \Rightarrow \boxed{f(\alpha^{d^k})^i} \leq c_3^{d^k \ell} \Rightarrow$ 結論: $\boxed{\eta_{\ell,k}} \leq c_4(\ell) c_4^{d^k \ell}$.
$\eta_{\ell,k} \in \mathbb{Z}[\alpha, \beta]$.
α, β に関する次数はそれぞれ高々 $d^k \ell + d^k \ell = 2d^k \ell \Rightarrow$ 結論: $\mathrm{den}(\eta_{\ell,k}) \leq c_5^{d^k \ell}$.

下からの評価と証明の完結

復習

基本不等式: $\gamma \in K \setminus \{0\}$ ならば, $\log|\gamma| \geq -2[K:\mathbb{Q}]\max\{\log\overline{|\gamma|}, \log\mathrm{den}(\gamma)\}$.
$0 < |\alpha| < 1$. 仮定: α と $\beta = f(\alpha)$ は代数的数. $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.
正整数 ℓ: 十分大きなものを固定. $E_\ell(z) = \sum_{i=0}^{\ell} P_i(z) f(z)^i$.
k: 正整数 (ℓ に依存して十分大きくする). $\eta_{\ell,k} = E_\ell(\alpha^{d^k}) \in K$.
"0 ではないこと" と上からの評価 (復習): $0 \neq |\eta_{\ell,k}| < c_1(\ell)|\alpha|^{d^k \ell^2}$.
前ページの結論: $\overline{|\eta_{\ell,k}|} \leq c_4(\ell) c_4^{d^k \ell}$, $\mathrm{den}(\eta_{\ell,k}) \leq c_5^{d^k \ell}$.

Step 3, 下からの評価 (基本不等式): $\log|\eta_{\ell,k}| \geq -c_6(\ell) - c_6 d^k \ell$.
Step 4, 評価式の比較: $\log c_1(\ell) + d^k \ell^2 \log|\alpha| \geq -c_6(\ell) - c_6 d^k \ell$.
両辺を d^k で割って $k \to \infty$: $\ell^2 \log|\alpha| \geq -c_6 \ell$.
両辺を ℓ^2 で割って $\ell \to \infty$: $\log|\alpha| \geq 0$. ($|\alpha| < 1$ に矛盾).
証明を通して述べたかった事: 超越数論では変数の依存関係に注意!