

代数演習 No.9問題

2014-6-11

1. 次の集合は \mathbb{Q} 上線形独立であるか求めよ。

- (a) $\{1, \sqrt{-1}\}$
- (b) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{\frac{49}{50}}\}$
- (c) $\{1, \sqrt{5}, \cos \frac{\pi}{5}\}$
- (d) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}\}$
- (e) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}\}$

2. 次の集合は体であるか求めよ。

- (a) $\{a\sqrt{-1} \mid a \in \mathbb{R}\}$
- (b) $\{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
- (c) $\{a + b\sqrt{3} + c\sqrt{-1} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
- (d) $\{a + b\sqrt{3} + c\sqrt{-1} + d\sqrt{-3} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$
- (e) $\{a\frac{1+\sqrt{5}}{2} + b\frac{1-\sqrt{5}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
- (f) $\{a + b\sqrt{3} \mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Z}\}$

3. p を素数とする。

$$\left(\begin{array}{l} \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \text{の単項イデアル} \\ (p) = p\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \text{が素イデアルである} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} p = a^2 + b^2 \text{を満たす整数} \\ a, b \text{が存在しない} \end{array} \right)$$

を示せ。