

# 代数演習 No.14問題

2014-7-9

$\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$  を代数拡大とし、 $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = n$  とする。

1. 任意の  $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$  に対して、 $m_\beta : \mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha), \gamma \mapsto \beta\gamma$  は  $\mathbb{Q}$  上の線形写像であることを示せ。
2.  $\alpha$  の最小多項式を  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  とする。 $\mathbb{Q}(\alpha)$  の基底  $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$  に対して、 $m_\alpha$  の表現行列を求めよ。
3.  $\beta \mapsto m_\beta$  は次のような準同形写像であることを示せ。

$$\mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{Q})$$

さらに単射であることを示せ。

4.  $\beta$  は  $m_\beta$  の固有多項式の根であることを示せ。
5.  $\alpha = \sqrt{D} \notin \mathbb{Q}, \beta = a + b\sqrt{D}$  とする。 $\mathbb{Q}$  上のベクトル空間  $\mathbb{Q}(\alpha)$  の基底  $\{1, \sqrt{D}\}$  に対して、 $m_\beta$  を行列で表せ。