位相入門演習 No.4問題

2012/12/26

1. (問 13.1) $C[a,b]$ の元 f,g に対して
$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in [a,b]\}$$
と定義する。 d_∞ は $C[a,b]$ 上の距離関数であることを示せ。

2. (問 13.2)
$$\ell^2 = \{x = (x_n) \mid x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$$
とおく。$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ に対して
$$d_2(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2\right)^{1/2}$$
とおく。 d_2 は ℓ^2 上の距離関数であれことを示せ。

3. (問 13.3) (X,d) を距離空間とする。 $A = N(a;\epsilon)$ について
   (a) $A^i = A$ は成り立つか?
   (b) $A^e = \{x \in X \mid d(a,x) > \epsilon\}$ は成り立つか?
   (c) $A^f = \{x \in X \mid d(a,x) = \epsilon\}$ は成り立つか?

4. $\mathbb{R}^n$ の 2点 $x = (x_i)_{i=1,\dots,n}, y = (y_i)_{i=1,\dots,n}$ に対して
$$d_p(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - y_n|^p\right)^{1/p}$$
とおく。 但し p は $1 \leq p < \infty$ を満たす定数。
   (a) d_p は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数であることを示せ。
   (b) $B_n^{(p)}(a;e) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_p(x,a) < \epsilon\}$ とおく。 $n=2$, $p=1,2,3$ に対して $B_2^{(p)}(0;e)$ の概形を描け。

5. 4 で定義した d_p に対し、3. (1)∼(3) を検討せよ。