

位相入門演習 No.2問題

2012/12/14

12 ユークリッド空間

$x \in \mathbb{R}^n, M \subset \mathbb{R}^n$ とする。

定義 1: $x \in M^i \Leftrightarrow \exists r > 0$ s.t. $B(x, r) \subset M$.

定義 2: $x \in \overline{M} \Leftrightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap M \neq \emptyset$.

定義 3: $x \in M^c \Leftrightarrow x \notin M$.

1

- (1) $y \in B(x, r)$ とする。 どのような $\delta > 0$ に対して $B(y, \delta) \subset B(x, r)$ となるか?
- (2) $y \in B(x, r) \Rightarrow \exists \delta > 0$ s.t. $B(y, \delta) \subset B(x, r)$ を示せ。
- (3) $B(x, r) \subset M \Rightarrow B(x, r) \subset M^i$ を示せ。
- (4) $(M^i)^i = M^i$ を示せ。

2

- (1) $(\overline{M})^c = (M^c)^i$ を示せ。 $(M^c)^c = M$ を示せ。
- (2) $\overline{(\overline{M})} = \overline{M}$ を示せ。

3 $\mathbb{Z}[1/2] = \{q \in \mathbb{Q} : \exists n \in \mathbb{Z}_{>0}$ s.t. $2^n q \in \mathbb{Z}\}$ とする。 ex. $\frac{1}{2}, \frac{3}{8} \in \mathbb{Z}[1/2]$, $\frac{1}{6} \notin \mathbb{Z}[1/2]$.

- (1) $(\mathbb{Z}[1/2])^i$ を求めよ。
- (2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r > 0, (x - r, x + r) \cap \mathbb{Z}[1/2] \neq \emptyset$ を示せ。
- (3) $\overline{\mathbb{Z}[1/2]}$ を求めよ。