

# 位相入門演習 No.1問題

2012/12/7

## 12 ユークリッド空間

1.  $\mathbb{R}^n$  の2つの点  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$  に対し

$$d^{(n)}(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

とおく。  $d^{(n)}(\cdot, \cdot)$  は次を満たすことを示せ。

- (a)  $d^{(n)}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (b)  $d^{(n)}(x, y) = d^{(n)}(y, x)$
- (c)  $d^{(n)}(x, z) \leq d^{(n)}(x, y) + d^{(n)}(y, z)$

2.  $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$  に対し

$$S_n(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d^{(n)}(x, a) = r\}$$

$$D_n(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d^{(n)}(x, a) \leq r\}$$

とおく。  $S_n(a; r), D_n(a; r)$  各々について、その内部、外部、境界 及び閉包を求めよ。

3. (問 12.1)  $\mathbb{R}^n$  の部分集合  $M$  について

- (a)  $(M^i)^i = M^i$
- (b)  $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$
- (c)  $\overline{(M^i)}$  と  $\overline{M}$  が一致しない例を挙げよ ( $n = 2$  としてよい)。
- (d)  $(\overline{M})^i$  と  $M^i$  が一致しない例を挙げよ ( $n = 2$  としてよい)。

4. (問 12.2)  $a_i < b_i \ i = 1, \dots, n$  とする。次を示せ。

- (a)  $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$  は開集合であるが閉集合でない。
- (b)  $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$  は閉集合であるが開集合でない。
- (c)  $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$  は開集合でも閉集合でもない。