

位相入門演習 No.1問題

2012/12/7

12 ユークリッド空間

1. \mathbb{R}^n の2つの点 $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ に対し

$$d^{(n)}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

とおく。 $d^{(n)}(\cdot, \cdot)$ は次を満たすことを示せ。

- (a) $d^{(n)}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (b) $d^{(n)}(x, y) = d^{(n)}(y, x)$
- (c) $d^{(n)}(x, z) \leq d^{(n)}(x, y) + d^{(n)}(y, z)$

2. $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$ に対し

$$S_n(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d^{(n)}(x, a) = r\}$$

$$D_n(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d^{(n)}(x, a) \leq r\}$$

とおく。 $S_n(a; r), D_n(a; r)$ 各々について、その内部、外部、境界 及び閉包を求めよ。

3. (問 12.1) \mathbb{R}^n の部分集合 M について

- (a) $(M^i)^i = M^i$
- (b) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$
- (c) $\overline{(M^i)}$ と \overline{M} が一致しない例を挙げよ ($n = 2$ としてよい)。
- (d) $(\overline{M})^i$ と M^i が一致しない例を挙げよ ($n = 2$ としてよい)。

4. (問 12.2) $a_i < b_i \ i = 1, \dots, n$ とする。次を示せ。

- (a) $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ は開集合であるが閉集合でない。
- (b) $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ は閉集合であるが開集合でない。
- (c) $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$ は開集合でも閉集合でもない。