2024 年科学研究費シンポジウム

構造化されたデータ解析とその統計・機械学習モデルの新展開

- 科学研究費補助金 基盤研究(A) 20H00576「大規模複雑データの理論と方法 論の革新的展開」研究代表者：青嶋 誠（筑波大学）によるシンポジウム
- 日時: 2024 年 11 月 22 日（金）—24 日(日)
- 場所: 南山大学名古屋キャンパス G 棟 G25 教室
- 開催責任者: 塩濱敬之(南山大学)
- 内容・目的: 構造化されたデータ解析(Structured data analysis)とは、分析対象となるデータにある種の形状や制約が仮定されているような場合の統計解析を意味し、その様な構造化されたデータ解析を可能とする統計・機械学習モデルの展開を広く含みます。識別問題やクラスター分析においては、データがクラスラベルをもつといった構造を扱う意味において構造化されたデータ解析の一例です。また、幾何多様体上に値をとるデータ解析や、そのような統計モデルの利用は構造化されたデータ解析の例といえます。時系列解析あるいは空間統計解析は観測データに付与される時点や地点といった情報をデータ構造としてモデル化します。データに木構造や位相構造を仮定した統計分析(ネットワークモデルや位相データ解析)など、構造化されたデータ解析は広いクラスの統計・機械学習モデルを含みます. 機械学習モデル・データサイエンスの発展に伴い、複雑な構造をもったデータ解析のニーズと統計手法の開発・発展が期待されています。本シンポジウムでは、構造化されたデータ解析に関する理論・応用研究をはじめ、さまざまな分野におけるデータ解析の紹介や問題意識の共有など、幅広いテーマを募集します。シンポジウムを通したデータサイエンス研究の更なる発展を目的とします。

科研費シンポジウム

「構造化されたデータ解析とその統計・機械学習モデルの新展開」

日時: **2024 年 11 月 22 日（金）ー　24 日(日)**
(Date: Friday 22nd, November to 24th, November
場所: 南山大学名古屋キャンパス G 棟 G25 教室
(Nanzan University Building G, G25 room)

科学研究費・基盤研究（A）（課題番号：20H00576）
「大規模複雑データの理論と方法論の革新的展開」
研究代表者：青嶋 誠（筑波大学）
Makoto Aoshima (University of Tsukuba)
開催責任者：塩濱 敬之（南山大学）
Takayuki Shiohama (Nanzan University)

Program

Friday, 22nd, November
Reception 13:00-13:15

Opening 13:15-13:20 Takayuki Shiohama

Session 1　(English, Chair, Hiroshi Shiraishi　白石博)
1.　13:20-14:00
佐川凜華（早稲田大学基幹理工学研究科）
Model selection criterion for periodicities in functional time series
2.　14:00-14:40
江頭　健斗（東京理科大学），矢田　和善（筑波大学），青嶋　誠（筑波大学）
Bias-corrected k-means method for high-dimensional low sample size data
3.　14:40-15:20
井本智明（静岡県立大学）
New construction of the cylindrical distribution

Coffee Break 15:20-15:50

Session 2 (English, Chair Takayuki Shiohama)
4.　15:50-16:30
後藤佑一 (九州大学), Hiroko Kato Solvang (Institute of Marine Research), Tone Falkenhaug (Institute of Marine Research), Masanobu Taniguchi (Waseda University)
ANOVATS: A subsampling-based test to detect differences among small-sample time series in marine
5.　16:30-17:10
蛭川潤一（新潟大学）
Rank tests for randomness against time-varying MA alternative
6.　17:10-17:50
Junho Yang (Academia Sinica), Qi-Wen Ding, Joonho Shin (Sungshin Women's University)
Pseudo-spectra of multivariate inhomogeneous spatial point processes

Saturday, 23rd, November

Session 3 (座長 井本智明)
7. 10:00-10:40
河合未夢
確率的特異値分解の性質とその応用
8. 10:40-11:20
宮田庸一（高崎経済大学），塩濱敬之（南山大学），阿部俊弘（法政大学）
ワイブル-拡張 sine-skewed フォンミーゼス分布をコンポーネントに持つ隠れマルコフモデル

Lunch 11:20-13:20

Session 4 (座長 矢田和善)
9. 13:20-14:00
阿部俊弘 （法政大学）
Cauchy sine-skewed circular distributions and their simple EM algorithm
10. 14:00-14:40
柿沢佳秀（北海道大学）， Xiaoqiang Zhen(曾小強) (Guangdong University of Education)
計数時系列の Whittle 法
11. 14:40-15:20
程島次郎 （名古屋商科大学）， 山分俊幸 (名古屋商科大学)
How to evaluate performance based on the Foster-Hart risk measure

Coffee Break 15:20-15:50

Session 5 (座長 松田眞一)
12. 15:50-16:20
都竹凜花(南山大学理工学研究科)，白石高章(南山大学)，松田眞一 (南山大学)
多群正規分布モデルにおける平均と分散を同時推測する多重比較法
13. 16:20-17:10
白石高章 （南山大学）
多重比較の礎 ―ノンパラメトリック法からパラメトリック法へ―

懇親会　18:00-

Sunday, 24th, November

Session 6　(座長 小方浩明)

14. 10:00-10:40

飯田優希(慶應義塾大学大学院理工学研究科)

白石博(慶應義塾大学)．小方浩明(東京都立大学)

Frechet regression による非ユークリッド空間上のデータ解析

15. 10:40-11:10

吉田耀晟（早稲田大学大学院基幹理工学研究科）

高次元時系列の同分散検定について

16. 11:20-12:00

穆佐飛来（九州大学大学院）

一般線形モデルにおけるベイズ線形推定量についての研究

17. 12:00-12:40

永井 勇（中京大学）

GMANOVA モデルの最尤推定量における新たな罰則付き推定とその最適化

Closing

Model selection criterion for periodicities in functional time series

Rinka Sagawa (Waseda University)
Yan Liu (Waseda University)
Valentin Patilea (ENSAI)

The statistical inference for time series in Banach space has been developed. That allows for new modelings in functional time series analysis. (Bosq 2000, Ramsay, Hooker and Graves 2009). Functional time series consist of functional observations indexed in time order. This is obtained by segmenting original data into smaller intervals. One of the characteristics of functional time series is the periodicity and detecting it helps us understand the functional features better.

In this research, let us consider the trigonometric regression model of order r_0 (r_0 is provisionally known) with functional time series (e.g. Hörmann et al. 2018):

$$Y_t(u) = \mu(u) + \left(\sum_{k=1}^{r_0} \big(\alpha_k \cos(t\theta_k) + \beta_k \sin(t\theta_k)\big)\right) \omega(u) + X_t(u), \qquad u \in [0,1], \tag{1}$$

where $\{X_t;\, t \in \mathbb{Z}\}$ is a zero-mean stationary time series of functions in $\mathcal{H} := L^2([0,1])$, μ and ω are unknown functions in $\mathcal{H}$ with $\|\omega(u)\|^2_{\mathcal{H}} = 1$. For each $i = 1, \ldots, r_0$, the parameters α_i, β_i ($\alpha_i \neq 0$ or $\beta_i \neq 0$), θ_i ($\in (0,\pi)$) are unknown.

By adopting the empirical functional principal components score for a fixed constant (e.g., Aue, Norinho and Hörmann 2015) and converting the model (1) to the vectorized model and the matrix form model, we described the estimation of these parameters when the number of periodicities r_0 is provisionally known. Theoretically, we established the consistency of the estimated parameters under some regularity conditions.

For specifying the unknown parameter r_0, we proposed a BIC-type information criterion for a trigonometric model in functional time series:

$$\varphi(r,h) = \log\{\hat{\sigma}^2_r(h)\} + (\kappa r + h)\frac{\log N}{N}, \tag{2}$$

where $\hat{\sigma}^2_r(h)$ is the prediction error by fitting AR(h) model to the first principal component of the residual when estimated r periodic component are subtracted from $\boldsymbol{Y}_t$ in the vectorized model, $\kappa := \kappa_N$ is some positive constant, and N is the number of observation in functional time series. We now completed the algorithm to estimate r_0 by the information criterion $\varphi(r,h)$ with an upper bound H satisfying $H = o(N^{1/4})$ and the minimizer $\hat{h}_r$ of the order of an autoregressive model.

Algorithm 1 The algorithm of detecting the number r_0 of periodicities.

Set : $r = 0$

Step 1 For $h \le H$, fit an h-order autoregressive model to $\hat{X}_t(0)$ to compute $\hat{\sigma}_0^2(h)$.

Step 2 Minimize $\varphi(0, h)$ with respect to h to obtain $\varphi(0, \hat{h}_0)$.

Step 3 For fixed r, estimate the $(r+1)$th frequency $\hat{\theta}_{r+1}$ by utilizing (5).

Step 4 For $h \le H$, fit an h-order autoregressive model to $\hat{X}_t(r+1)$ to compute $\hat{\sigma}_{r+1}^2$.

Step 5 Minimize $\varphi(r+1, h)$ with respect to h to obtain $\varphi(r+1, \hat{h}_{r+1})$.

If $\varphi(r+1, \hat{h}_{r+1}) < \varphi(r, \hat{h}_r)$

Repeat Step 3 through Step 5 with $r \leftarrow r+1$.

Else

Stop the recursion and obtain $\hat{r} = r$.

Output : The estimated number $\hat{r}$ of periodicities

Theoretically, under some regularity conditions, we proved the consistency of the estimated number of periodicities obtained from Algorithm 1 by explaining the frequency domain framework of the functional time series.

In the simulation, we confirmed that the proposed criterion is insensitive to the choice of κ as sample size increases by checking the "stable" range of κ become larger as the number of observation increases. The term "stable" refers to the ability to choose the correct number of periodicities across all simulations most frequently.

In the data analysis, we reported the application of the proposed method to the sunspot data and the temperature data to verify the practicality. Regarding the sunspot data, 11-year cycle is estimated. Regarding the temperature data, 3-year cycle is observed.

Regarding this talk, there were questions concerning the AIC-type information criterion and its comparison, the "stable" range of the penalty term in the proposed information criterion, the consistency of the estimated frequency parameter, the regularity condition, and the real data analysis of sunspot data.

References

Aue, A., Norinho, D. D. and Hörmann, S., Siegfriedrmann (2015). On the Prediction of Stationary Functional Time Series. *Journal of the American Statistical Association* **110** 378–392.

Bosq, D. (2000). *Linear Processes in Function Spaces: Theory and Applications.* Springer Science & Business Media.

Hörmann, S., Kokoszka, P. and Nisol, G. (2018). Testing for periodicity in functional time series. *The Annals of Statistics* **46** 2960–2984.

Ramsay, J., Hooker, G. and Graves, S. (2009). *Functional Data Analysis with R and MATLAB.* Springer.

Bias-corrected k-means method for high-dimensional low sample size data

Kento Egashira[a], **Kazuyoshi Yata**[b], **Makoto Aoshima**[b]

[a]**Department of Information Sciences, Tokyo University of Science**
[b]**Institute of Mathematics, University of Tsukuba**

1 Introduction

Cluster analysis can be categorized into two primary types: hierarchical and partitional. Hierarchical clustering organizes data into dendrograms based on the similarities determined using a predefined linkage function. A dendrogram enables the observation of the process of merging or dividing of clusters. For further discussion on hierarchical cluster analysis, refer to Everitt et al. [4] and Hastie et al. [6]. As implied by its name, partitional clustering segments data into a pre-determined number of clusters. K-means clustering is an example of partitional clustering. K-means clustering has been recognized as an effective method for analyzing microarray gene expression data. Such data typically features a high number of variables relative to the sample size, resulting in high-dimensional, low-sample-size (HDLSS) scenarios. Recent research has extensively explored HDLSS asymptotic clustering. Several studies have contributed to this field. Liu et al. [8] introduced a two-way split statistical-significance-of-clustering (SigClust) method specifically for HDLSS data. Ahn et al. [1] developed a hierarchical divisive clustering approach for high-dimensional asymptotic. Huang et al. [5] enhanced SigClust by incorporating a soft thresholding technique. Kimes et al. [7] devised a method for sequentially testing the statistical significance of hierarchical clustering by controlling the family-wise error rate in HDLSS contexts. Yata and Aoshima [11] demonstrated the consistency properties of sample principal component scores and their application to clustering in high-dimensional settings. Nakayama et al. [9] examined HDLSS clustering using kernel principal component analysis. To ensure effective performance in HDLSS data scenarios, Sarker and Ghosh [10] developed clustering methods based on the mean absolute differences in pairwise distances. After analyzing the behavior of hierarchical clustering under various asymptotic conditions, Borysov et al. [2] noted that the theoretical assumptions were stringent for HDLSS data because of multiple simultaneous asymptotic settings. Egashira et al. [3] investigated practical assumptions to elucidate the behavior of hierarchical clustering, achieving theoretical results in multiclass settings. Despite these advances, the asymptotic properties of k-means in HDLSS settings remain underexplored.

In this talk, we examined the asymptotic properties of k-means clustering under practical conditions, building on existing knowledge of these properties in HDLSS settings. We theoretically explored these properties as both the dimension and the sample size approach infinity. Additionally, we present modifications to the k-means algorithm and analyze the theoretical distinctions between the modified and conventional k-means under high dimensional settings. Especially, we mensioned kernel k-means with gaussian kernel function and compared performance of it to conventional k-means in the HDLSS context.

Acknowledgments

This research of the first author was partially supported by Grants-in-Aid for Early-Career Scientists, JSPS, Japan, under Contract Number 24K20748 and Scholarship Fund for Young Researchers, PMAC, Japan. This research of the second author was partially supported by a Grant-in-Aid for Scientific Research (C), JSPS, Japan, under Contract Number 22K03412. The third author's research was partially supported by Grants-in-Aid for Scientific Research (A) and Challenging Research (Exploratory), JSPS, Japan, under Contract Numbers 20H00576 and 22K19769.

References

[1] Ahn, J., Lee, M.H., Yoon, Y.J. (2012). Clustering high dimension, low sample size data using the maximal data piling distance. *Statistica Sinica*, 22, 443–464.

[2] Borysov, P., Hannig, J., Marron, J.S. (2014). Asymptotics of hierarchical clustering for growing dimension. *Journal of Multivariate Analysis*, 124, 465–479.

[3] Egashira, K., Yata, K., Aoshima, M. (2024). Asymptotic properties of hierarchical clustering in high-dimensional settings. *Journal of Multivariate Analysis*, 199, 105251.

[4] Everitt, B.S., Landau, S., Leese, M. (2001). Cluster Analysis. Arnold, New York.

[5] Huang, H., Liu, Y., Yuan, M., Marron, J.S. (2015). Statistical Significance of Clustering using Soft Thresholding. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 24, 975–993.

[6] Hastie, T., Tibshirani, R., Friedman, J. (2009). The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction, Second Edition, Springer, New York.

[7] Kimes, P.K., Liu, Y., Neil, H.D., Marron, J.S. (2017) Statistical significance for hierarchical clustering. *Biometrics*, 73, 811–821.

[8] Liu, Y., Hayes, D.N., Nobel, A., Marron, J.S.(2008). Statistical significance of clustering for high-dimension, low-sample size data. *Journal of the American Statistical Association*, 103, 1281–1293.

[9] Nakayama, Y., Yata, K., Aoshima, M. (2021). Clustering by principal component analysis with Gaussian kernel in high-dimension, low-sample-size settings. *Journal of Multivariate Analysis*, 185, 104779.

[10] Sarkar, S., Ghosh, A.K. (2020) On Perfect Clustering of High Dimension, Low Sample Size Data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 42, 2257–2272.

[11] Yata, K., Aoshima, M. (2020). Geometric consistency of principal component scores for high-dimensional mixture models and its application. *Scandinavian Journal of Statistics*, 47, 899–921.

New construction of the cylindrical distribution

Imoto Tomoaki
University of Shiozuoka

Abstract

A probability distribution on the cylinder, or cylindrical distribution is a bivariate distribution with linear and circular random variables. The applications of cylindrical distribution can be seen in the various scientific fields; analysis of the wind speed and wind direction in environmental science, distance and direction in the area of animal movement, position and pass direction in the ball game, blood plasma and acrophase in the area of biological rhythms, and so on.

Mardia and Sutton [8] proposed the distribution whose linear and circular marginals are normal and von Mises distributions, respectively. An extension of Mardia and Sutton distribution was considered by Kato and Shimizu [5], where the circular marginal is a generalized von Mises distribution by Gatto and Jammalamadaka [2]. The linear marginal and circular conditional distributions of these two distributions are unfamiliar and expressed by intractable functions. Johnson and Wehrly [4] proposed a similar distribution to the distribution by Mardia and Sutton [8]. Its linear and circular conditional distributions are normal and von Mises distributions, respectively. In the case where the linear variable takes on positive values, Johnson and Wehrly [4] proposed the distribution whose conditionals are exponential and von Mises distributions and circular marginal is a wrapped Cauchy distribution. However, its linear marginal is expressed by a less tractable function. Abe and Ley [1] extended this distribution by turning the exponential and von Mises parts into the Weibull and sine-skewed von Mises distributions, respectively. More extension by Imoto et. al. [3] was considered by turning the Weibull part into a power-transformed Pareto distribution. The construction of cylindrical distribution as a method of specifying marginals was proposed by Johnson and Wehrly [4]. its probability density function (pdf) is constructed as

$$f(x,\theta) = 2\pi g(2\pi\{F_X(x) + pF_\Theta(\theta)\}) f_X(x) f_\Theta(\theta),$$

where $p \in \{-1, 1\}$, $f_X(\cdot)$ is the linear pdf with distribution function (df) $F_X(\cdot)$, $f_\Theta(\cdot)$ is the circular pdf with df $F_\Theta(\cdot)$, and $g(\cdot)$ is the circular pdf. The summaries about these distributions and the method are seen in Mardia and Jupp [7], Ley and Verdebout [6], and Pewsey and García-Portugués [9].

In this paper, a new method is proposed for constructing a cylindrical distribution with a simple expression for its pdf. To achieve this goal, the following functions are introduced. Let $f_X(\cdot)$ be symmetric linear pdf about 0 whose variance is 1, $f_\Theta(\cdot)$ be symmetric circular pdf about 0, and $G(\cdot)$ be the df whose pdf is symmetric about 0, or $G(x) = 1 - G(-x)$. Some examples of $G(\cdot)$ includes the uniform df $G(x) = \frac{1+x}{2}$, $x \in [-1, 1]$, the logistic df $G(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$, the Cauchy df $G(x) = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}(x)\right\}$, $x \in \mathbb{R}$, and the wrapped Cauchy df $G(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}\{e^{\kappa}\tan(x)\}\right]$, $x \in [-\pi, \pi)$. And let $w(\cdot,\cdot)$ be a bivariate function whose range is included in the support of the df $G(\cdot)$, or $w(\cdot,\cdot) \in \mathrm{supp}\{G\}$, and satisfies $w(x,\theta) = -w(-x,\theta) = -w(x,-\theta) = w(-x,-\theta)$, $w(x,\theta) = w(x,\theta+2k\pi)$ for arbitrary integer

k. For example, $w(x,\theta) = x \sin\theta$ and $w(x,\theta) = \sin(2\mathrm{Arctan} x)\sin\theta = \frac{2x}{1+x^2}\sin\theta$. Then, the function

$$f(x,\theta) = 2G\left(\lambda w\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma}, \theta-\mu_\Theta\right)\right)\frac{1}{\sigma}f_X\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma}\right)f_\Theta(\theta-\mu_\Theta),$$

becomes a pdf of a cylindrical distribution. The parameter λ controls the relation between the linear and circular variables, The marginal pdfs of this distribution are $f_X\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma}\right)$ and $f_\Theta(\theta - \mu_\Theta)$, so μ_X and σ are the location and scale parameters about a linear variable, respectively, and μ_Θ is the location parameter about a circular variable. This construction is one of the methods of specifying marginals, but needs not the dfs of the marginal distributions and additional normalizing constant, which is an advantage of the cost of the calculation.

In this talk, the properties of the proposed construction and application to real datasets are provided, and the special case and more flexible construction are also considered.

References

[1] T. Abe and C. Ley. A tractable, parsimonious and flexible model for cylindrical data, with applications. *Econometrics and Statistics*, 4:91–104, 2017.

[2] R. Gatto and S. R. Jammalamadaka. The generalized von Mises distribution. *Statistical Methodology*, 4:341–353, 2007.

[3] T. Imoto, K. Shimizu, and T. Abe. A cylindrical distribution with heavy-tailed linear part. *Japanese Journal of Statistics and Data Science*, 2:129—154, 2019.

[4] R. A. Johnson and T. E. Wehrly. Some angular-linear distributions and related regression models. *Journal of the American Statistical Association*, 73:602–606, 1978.

[5] S. Kato and K. Shimizu. Dependent models for observations which include angular ones. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 138:3538–3549, 2008.

[6] C. Ley and T. Verdebout. *Modern Directional Statistics.* CRC Press, Boca Raton, 2017.

[7] K. V. Mardia and P. E. Jupp. *Directional Statistics.* Wiley, Chichester, 1999.

[8] K. V. Mardia and T. W. Sutton. A model for cylindrical variables with applications. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 40:229–233, 1978.

[9] A. Pewsey and E. García-Portugués. Recent advances in directional statistics. *Test*, 30:1–58, 2021.

ANOVATS: A subsampling-based test to detect differences among small-sample time series in marine study

Yuichi Goto (Kyushu University)*1
Hiroko Kato Solvang (Institute of Marine Research)
Tone Falkenhaug (Institute of Marine Research)
Masanobu Taniguchi (Waseda University)

1. Introduction

水産資源の管理は, 水産物の安定供給や生物種の枯渇防止のため重要で, その信頼性を高めるためには, 海洋生態系における科学的な理解を深める必要がある. 海洋生態系査定で取り扱うデータは**短い時系列データ**であることが多いため, 多くの観測を必要とする既存の手法を用いることは誤った結論を導く可能性がある. 時系列データに対する分散分析手法はその一例である. Long-run variance（スペクトル密度関数の原点）の逆数の推定が必要になるが, これには長期の時系列観測が必要なことが知られている.

これを踏まえ本講演では, 領域間の等平均性の検定問題を考え, サブサンプリング法を用いた短い時系列データに対する**分散分析手法**を提案した. これにより, 分割型階層的クラスタリングが実現可能になった.

2. ANOVA for small sampled Time Series data (ANOVATS)

時系列一元配置モデルは

$$\boldsymbol{z}_{it} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\psi}_i + \boldsymbol{e}_{it}, \qquad i = 1, \ldots, a;\ t = 1, \ldots, n$$

と定義される. ここで, $\boldsymbol{z}_{it} := (z_{it1}, \ldots, z_{itp})^\top$ は i 領域 t 番目の観測, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_p)^\top$ は領域ごとに共通の平均, $\boldsymbol{\psi}_i := (\psi_{i1}, \ldots, \psi_{ip})^\top$ は $\sum_{i=1}^a \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{0}$ を満たす領域固定効果, $\boldsymbol{e}_{it} := (e_{it1}, \ldots, e_{itp})^\top$ で $\boldsymbol{e}_t = (\boldsymbol{e}_{1t}^\top, \ldots, \boldsymbol{e}_{at}^\top)^\top$ はスペクトル行列 $\boldsymbol{f}(\lambda) := (\boldsymbol{f}_{ij}(\lambda))_{i,j=1,\ldots,a}$ を持つ geometrically α-mixing 定常過程で全てのモーメントが存在するものとする.

領域の等平均性の仮説は

$$H_0 : \boldsymbol{\psi}_1 = \cdots = \boldsymbol{\psi}_a \quad \text{v.s.} \quad H_1 :\ H_0 \text{が不成立}$$

と定式化される. 検定統計量を $T_n = n \sum_{i=1}^a (\overline{\boldsymbol{z}_{i\cdot}} - \overline{\boldsymbol{z}_{\cdot\cdot}})^\top (\overline{\boldsymbol{z}_{i\cdot}} - \overline{\boldsymbol{z}_{\cdot\cdot}})$ と定義する. ここで, $\overline{\boldsymbol{z}_{i\cdot}} = \sum_{t=1}^n \boldsymbol{z}_{it}/n$, $\overline{\boldsymbol{z}_{\cdot\cdot}} = \sum_{i=1}^a \sum_{t=1}^n \boldsymbol{z}_{it}/(an)$ である. 統計量 T_n はスペクトルの推定量を含まないが, その代償として（漸近的）distribution-free ではない. そのため, サブサンプリング法を用いた検定を定義する. サブサンプリング統計量を

$$T_{n,b,t} = \frac{b}{1 - \frac{b}{n}} \sum_{i=1}^a (\overline{z_{i\cdot,b,t}} - \overline{z_{\cdot\cdot,b,t}})^\top (\overline{z_{i\cdot,b,t}} - \overline{z_{\cdot\cdot,b,t}})$$

とし, それに基づいた p 値を $p_n = \sum_{t=1}^{n-b+1} \mathbb{I}\{T_{n,b,t} > T_n\}/(n - b + 1)$ と定義する. ここで, $\overline{z_{i\cdot,b,t}} = \sum_{j=t}^{t+b-1} z_{ij}/b$, $\overline{z_{\cdot\cdot,b,t}} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=t}^{t+b-1} z_{ij}/(ab)$, $\mathbb{I}\{\cdot\}$ は指示関数.

この p 値を用いて定義される検定は次の性質を満たす.

本研究は JSPS 科研費 JP23K16851 の助成を受けたものである.

*1 e-mail: yuichi.goto@math.kyushu-u.ac.jp

定理 1. サブサンプリングブロックの長さ b が $n \to \infty$ に伴い $b \to \infty$, $b/\sqrt{n} \to 0$ を満たすとする．このとき, $p_n < \varphi$ を満たすときに H_0 を棄却する検定は漸近サイズ φ で漸近検出力は *1* である．

さらに, φ_n が $n \to \infty$ に伴って $\varphi_n \to 0$, $\varphi_n / \left(n^{\frac{a}{2}-1} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)\right) \to \infty$ を満たすとすると, $p_n < \varphi_n$ を満たすときに H_0 を棄却する検定は漸近サイズ *0* で漸近検出力は *1* である．

3. Post-ANOVATS Procedure

帰無仮説 H_0 を棄却した後の解析手順を提案する．

1. **全領域に対する仮説検定**　$p = 1$ とし, Area_i をデータ $\{z_{it}\}_{t=1,\ldots,n}$ が観測された領域とする．各領域の差異がないという帰無仮説と, 領域間に差異があるという対立仮説に対して p_n を計算して,

   H_0 が採択される（$p_n > 0.05$）場合, 手順を終了する．

   H_0 が棄却される（$p_n \leq 0.05$）場合, 次のステップに進む．

2. **領域の二分割**　H_0 が棄却された場合, 全領域の標本平均を昇順に並べたもの $\overline{z_{[1].}}, \ldots, \overline{z_{[a].}}$ を考え, これに対応する領域を $\mathrm{Area}_{[1]}, \ldots, \mathrm{Area}_{[a]}$ とする．次に, 隣接する領域の標本平均の差 $\overline{z_{[i+1].}} - \overline{z_{[i].}}$ をすべての $i = 1, \ldots, a-1$ について計算し, 差が最大となるインデックス i' を特定する:

   $$i' := \mathop{\arg\max}_{i=1,\ldots,a-1} (\overline{z_{[i+1].}} - \overline{z_{[i].}}).$$

   これにより領域を二分割する:

   $$\text{グループ 1: } \mathrm{Area}_{[1]}, \ldots, \mathrm{Area}_{[i']}, \quad \text{グループ 2: } \mathrm{Area}_{[i'+1]}, \ldots, \mathrm{Area}_{[a]}.$$

3. **さらなる分割**　分割された各グループに対して, さらなる分割の必要性を判断するための仮説検定を行う:

   $$\text{グループ 1} \quad H_0 : \psi[1] = \cdots = \psi[i'] \quad \text{v.s.} \quad \text{対立仮説:} \quad H_1 : H_0 \text{ が不成立},$$
   $$\text{グループ 2} \quad H_0 : \psi[i'+1] = \cdots = \psi[a] \quad \text{v.s.} \quad \text{対立仮説:} \quad H_1 : H_0 \text{ が不成立}.$$

   上の手順を各グループに対して繰り返し, 仮説が受容される, またはグループ内の領域数が 1 になるまで, 検定と分割を続ける．

以上の手順に従うことで, 領域を統計的に有意なクラスターに分けることが可能となった．我々の提案手法を, 北海における気候と動物性プランクトンの資源管理プログラムにおいて観測されたバイオマスデータに適用した．動物性プランクトンは食物連鎖の下方にある重要な海洋資源で, 提案手法は北海南部の浅瀬からノルウェー海溝の深海にまたがる多様な生態系の中におけるバイオマスの差異を統計的に示すのに有用である．

Rank Tests for Randomness Against Time-varying MA Alternative

Junichi Hirukawa
Niigata University

ABSTRACT

In this talk, we extend the idea of the problem of testing randomness against ARMA alternative to a class of locally stationary processes introduced by Dahlhaus ([1, 2]). We use the linear serial rank statistics and apply the notion of the contiguity by LeCam [7] for the testing problem. Under the null hypothesis, the joint asymptotic normality of the proposed rank test statistics and log-likelihood ratio is established by making use of the local asymptotic normal property. Then, applying LeCam's third lemma, the asymptotic normality of test statistic under the alternative is shown automatically.

1 Introduction

The stationary process has been widely used for many statistical problems in time series analysis. Various properties of stationary model have been established and applied in many fields. Although these models play an important role in statistical analyses, the assumption of stationarity is severe in practice. Many empirical studies showed that actual time series data generally behave like non-stationary. Therefore, there is a natural need for a time series analysis method without the stationary assumption. In order to develop the asymptotic theory, [1, 2] proposed important model of a non-stationary process that is referred to as locally stationary processes. The locally stationary processes have time-varying spectral density functions whose spectral structures changes slowly in time.

In asymptotic theory of statistical analyses, the locally asymptotic normality (LAN) (see, e.g., [7]) is one of the most fundamental concepts and describes the optimal solution of virtually all asymptotic inference and testing problems. The LAN approach has been introduced in time series settings. For time series regression models with long memory disturbance, [6] showed LAN theorem and discussed an adaptive estimation.

ARMA models are widely used to describe time series data. Testing for ARMA model (or randomness) against other ARMA model is certainly a very important problem in time series analysis, because of its implication in the various identification and validation steps of time series model-building procedures. The paper [3] gave the fundamental contribution for the classical theory of rank-based inference. The paper [4] proposed the linear serial rank statistics for the problem of testing randomness against ARMA model. The paper [5] derived the asymptotic distribution of the log-likelihood ratio when an alternative ARMA model is contiguous to another null ARMA model. They also proposed a test based on the linear serial rank statistics and derived its asymptotic normality under both null and alternative hypotheses.

Based on the ideas of these previous studies, we consider the problem of testing randomness against locally stationary MA (time-varying MA) alternative models. We use the linear serial rank statistics and contiguity of LeCam's notion for the testing problem. In the contiguous case, the derivations of the limiting distributions of the test statistics are automatic by virtue of LeCam's third lemma. Then, our main purpose is establishing the asymptotic normality of the linear serial rank statistics under both randomness (null hypothesis) and time-varying MA models (alternative hypothesis).

2 Main results

Theorem 1.

Under the null hypothesis $H_0^{(T)} = H\left(p;\theta\right)$*,*

$$\begin{pmatrix} \sqrt{T}\left(S^{(T)} \quad m^{(T)}\right) \\ \Lambda_T\left(\theta,\theta_T\right) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(\widetilde{\boldsymbol{m}},\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}\right),$$

with

$$\widetilde{\boldsymbol{m}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mathcal{F}(p)}{2\sigma^2}\sum_{j=0}^{q}\int_0^1 \widetilde{d}_j\left(u\right)^2 du \end{pmatrix}$$

and

$$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} V^2 & -\sum_{j=0}^{q}\frac{C_j h_j}{\sigma}\int_0^1 \widetilde{b}_j\left(u\right) du \\ \sum_{j=0}^{q}\frac{C_j h_j}{\sigma}\int_0^1 \widetilde{b}_j\left(u\right) du & \frac{\mathcal{F}(p)}{\sigma^2}\sum_{j=0}^{q}\int_0^1 \widetilde{d}_j\left(u\right)^2 du \end{pmatrix}.$$

From LeCam's third lemma, we immediately obtain the following result.

Corollary 1.

Under $K\left(p;\theta_T\right)$*,*

$$\sqrt{T}\left(S^{(T)} \quad m^{(T)}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(-\sum_{j=0}^{q}\frac{C_j h_j}{\sigma}\int_0^1 \widetilde{b}_j\left(u\right) du, V^2\right).$$

References

[1] R. Dahlhaus. Maximum likelihood estimation and model selection for locally stationary processes. *Journal of Nonparametric Statistics*, 6(2-3):171–191, 1996.

[2] R. Dahlhaus. On the Kullback–Leibler information divergence of locally stationary processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 62(1):139–168, 1996.

[3] J. Hájek. Asymptotically most powerful rank-order tests. *The Annals of Mathematical Statistics*, 33(3):1124 – 1147, 1962.

[4] Marc Hallin, Jean-Francois Ingenbleek, and Madan L. Puri. Linear serial rank tests for randomness against ARMA alternatives. *The Annals of Statistics*, 13(3):1156 – 1181, 1985.

[5] Marc Hallin and Madan L. Puri. Optimal rank-based procedures for time series analysis: testing an ARMA model against other ARMA models. *The Annals of Statistics*, 16(1):402 – 432, 1988.

[6] Marc Hallin, Masanobu Taniguchi, Abdeslam Serroukh, and Kokyo Choy. Local asymptotic normality for regression models with long-memory disturbance. *The Annals of Statistics*, 27(6):2054–2080, 1999.

[7] Lucien LeCam. *Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory*. Springer, UK, 1986.

Pseudo-spectra of multivariate inhomogeneous spatial point processes

Qi-Wen Ding [1], Joonho Shin [2], and Junho Yang [1]

[1]Institute of Statistical Science, Academia Sinica
[2]School of Mathematics, Statistics and Data Science, Sungshin Women's Univeristy

September 24, 2024

Abstract

In this presentation, we propose a new spectral method for multivariate inhomogeneous spatial point processes. A key idea is utilizing the asymptotic behavior of the periodogram. The periodogram is an asymptotically unbiased estimator of the spectrum of a second-order stationary point process. By extending this property to the inhomogeneous case, we show that the expectation of the periodogram converges to a matrix-valued function that is Hermitian and positive definite. We call this function the pseudo-spectrum of a multivariate inhomogeneous point process. We show that the pseudo-spectrum can be interpreted in terms of the integration of the local spectrum. We derive a consistent estimator of the pseudo-periodogram through kernel smoothing and propose bandwidth selection methods. In simulations, we show that our estimator has satisfactory finite sample properties.

Keywords and phrases: BCI data, cross validation, local spectrum, local complete covariance

1 Main ideas

Let $m \in \mathbb{N}$ and let $\underline{X} = (X_1, \dots, X_m)$ be an m-variate simple spatial point processes defined on $\mathbb{R}^d$. For $i \in \{1, \dots, m\}$, $N_i(\cdot)$ denotes the counting measure induced by X_i. Then, the first-order intensity function of X_i, denoted as $\lambda_1^{(i)} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, satisfies $\mathbb{E}[N_i(A)] = \int_A \lambda_1^{(i)}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ denotes the Borel set of $\mathbb{R}^d$. Next, the second-order marginal (when $i = j$) and cross (when $i \neq j$) covariance intensity function of X_i and X_j, denoted as $\gamma_2^{(i,j)} : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$, satisfy

$$\mathrm{cov}(N_i(A), N_j(B)) = \int_{A\times B} \gamma_2^{(i,j)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}, \quad i, j \in \{1, \dots, m\}, \tag{1.1}$$

for any disjoint $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Next, we consider the discrete Fourier transform (DFT) of the observed point pattern. Let $D_n \subset \mathbb{R}^d$ ($n \in \mathbb{N}$) be a sequence of common observational windows of $X_1, \dots, X_m$ with the following form:

$$D_n = [-A_1/2, A_1/2] \times \dots [-A_d/2, A_d/2], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Here, for $i \in \{1, \dots, d\}$, $\{A_i = A_i(n)\}_{n=1}^{\infty}$ is an increasing sequence of positive numbers. Let $h(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, be a non-negative data taper with a support $[-1/2, 1/2]^d$. We define

$$H_{h,k}^{(n)}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{D_n} h(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{A})^k \exp(-i\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{x}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d, \tag{1.3}$$

where $h(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{A}) = h(x_1/A_1, \dots, x_d/A_d)$ and $H_{h,k} = |D_n| H_{h,k}^{(n)}(\boldsymbol{0}) = \int_{[-1/2,1/2]^d} h(\boldsymbol{x})^k d\boldsymbol{x}$. Using these notion, the DFT of jth point process with data taper h is defined as

$$\mathcal{J}_{h,n}^{(j)}(\boldsymbol{\omega}) = (2\pi)^{-d/2} H_{h,2}^{-1/2} |D_n|^{-1/2} \sum_{\boldsymbol{x} \in X_j \cap D_n} h(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{A}) \exp(-i\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.4}$$

For ease of presentation, we will use the common taper function h over j. Let $\underline{\mathcal{J}}_{h,n}(\boldsymbol{\omega}) = (\mathcal{J}_{h,n}^{(1)}(\boldsymbol{\omega}), \dots, \mathcal{J}_{h,n}^{(m)}(\boldsymbol{\omega}))^\top$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$, be the vectorization of the DFT. Then, the periodogram, a raw estimator of the spectrum, is defined as

$$I_{h,n}(\boldsymbol{\omega}) = \underline{J}_{h,n}(\boldsymbol{\omega}) \underline{J}_{h,n}(\boldsymbol{\omega})^*, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d, \tag{1.5}$$

where

$$\underline{J}_{h,n}(\cdot) = (J_{h,n}^{(1)}(\cdot), \dots, J_{h,n}^{(m)}(\cdot))^\top = \underline{\mathcal{J}}_{h,n}(\cdot) - \mathbb{E}[\underline{\mathcal{J}}_{h,n}(\cdot)] \tag{1.6}$$

is the centered DFT.

Next, we define the second-order intensity reweighted stationary process (SOIRS; Baddeley et al. [2000]).

Definition 1.1. *$\underline{X}$ is called the second-order intensity reweighted stationary (SOIRS) process if there exists $L_2(\boldsymbol{x}) = (\ell_2^{(i,j)}(\boldsymbol{x})) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{m \times m}$ such that $\gamma_2^{(i,j)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) / (\lambda_1^{(i)}(\boldsymbol{x}) \lambda_1^{(j)}(\boldsymbol{y})) = \ell_2^{(i,j)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$.*

In the presentation, we will show the following three things:

(a) We prove the sampling properties of the periodogram (1.5) under the second-order intensity reweighted stationary case.

(b) We show the sampling properties of the kernel smoothed version of (1.5).

(c) We develop a graphical representation for inhomogeneous spatial point processes.

References

A. J. Baddeley, J. Møller, and R. Waagepetersen. Non-and semi-parametric estimation of interaction in inhomogeneous point patterns. *Stat. Neerl.*, 54(3):329–350, 2000.

確率的特異値分解の性質とその応用

河合未夢

従来からデータの意味を分析する潜在意味解析に関する研究は盛んに行われている．当初は特異値分解による行列分解モデルによって定式化され, 分解した行列のベクトルを調べることで元のデータの成り立ちを解釈してきた．特異値分解のように一意性が高く計算コストが小さいモデルは, 現実の問題を対処する際, 実用性として重要である．そこで本研究は特異値分解を確率的行列分解モデルへ拡張した確率的特異値分解について考える．提案するモデルは特異値分解を基に, 確率的解釈をするものとなっている．

確率的特異値分解の準備として特異値分解についてまとめる．複素数の集合と零以上の実数の集合を, それぞれ $\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}_{\geq 0}$ と表記する．フルランクの複素行列 $R = (r_{mn})$ のサイズを $M \times N$ $(M \leq N)$, ランクを $K = M$ とする．行列 R の特異値分解は以下になる．

$$R = \Theta \Sigma \Phi^{\dagger}, \tag{1}$$

ここで, $\Theta \in \mathbb{C}^{M \times K}$ と $\Phi \in \mathbb{C}^{N \times K}$ は複素数を含む直交行列, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_K) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{K \times K}$ は特異値 $\sigma_1, \ldots, \sigma_K$ を成分に持つ対角行列である．また, 表記 $\dagger$ はベクトルおよび行列の複素共役の転置を示す．

行列 R のスペクトル分解によりより, 以下の関係式が導かれる．

$$RR^{\dagger}\boldsymbol{\theta}_k = \sigma_k^2 \boldsymbol{\theta}_k, \tag{2}$$

$$R^{\dagger}R\boldsymbol{\phi}_k = \sigma_k^2 \boldsymbol{\phi}_k, \tag{3}$$

ここで, $RR^{\dagger}$ と $R^{\dagger}R$ はエルミート行列, $\boldsymbol{\theta}_k$ と $\boldsymbol{\phi}_k$ は固有ベクトル, σ_k^2 は固有値である．したがって, 式 (2) と (3) は固有値方程式となっている．表記 z^* を複素数 z の複素共役とすると, その絶対値 $|z|$ の二乗は $|z|^2 = zz^*$ となる．ベクトル $\boldsymbol{\theta}_k$ と $\boldsymbol{\phi}_k$ は正規化されているため, その絶対値の二乗の総和は 1 となる．

$$\sum_{m=1}^{M} |\theta_{mk}|^2 = 1, \quad \sum_{n=1}^{N} |\phi_{nk}|^2 = 1.$$

以上の関係から, ベクトル $\boldsymbol{\theta}_k$ と $\boldsymbol{\phi}_k$ の成分の絶対値の二乗は, 確率分布および確率ベクトルと見做せる．この特異値分解の性質を基にして, 確率的特異値分解を定式化する．

確率的特異値分解を導出する．まず, ベクトルの正規化の類推で行列の正規化を考えるが, ここでの正規化は一般的な正規行列に関するものとは異なることに注意する．行列の Frobenius ノルムを $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ と表記する．行列 R および特異値の対角行列 Σ の Frobenius ノルムは以下のように計算する．

$$\|R\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} |r_{mn}|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{K} \sigma_k^2} = \|\Sigma\|_{\mathrm{F}}\,.$$

行列 R の正規化行列を $S = (s_{nm}) \in \mathbb{C}^{M \times N}$, 対角行列 Σ の正規化行列を $\Lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{K \times K}$ とする．ただし, 正規化行列 Λ の対角成分は $\lambda_1, \ldots, \lambda_K$ である．正規化行列 S と Λ を Frobenius ノルムを用いて以下のように定義する．

$$S = \frac{1}{\|R\|_{\mathrm{F}}} R, \quad \Lambda = \frac{1}{\|\Sigma\|_{\mathrm{F}}} \Sigma.$$

式 (1) より, 正規化特異値行列を以下のように定義する．

$$S = \Theta \Lambda \Phi^{\dagger}.$$

正規化行列 S について，その成分の二乗の総和は 1 となる．

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}|s_{mn}|^2 = |s_{11}|^2 + \cdots + |s_{MN}|^2 = 1. \tag{4}$$

式 (4) について，ベクトル $(s_{11}, \ldots, s_{MN})$ と $\left(|s_{11}|^2, \ldots, |s_{MN}|^2\right)$ は，それぞれ $(MN-1)$-次元単位円と $(MN-1)$-次元単体上における点となっている．

行列のスペクトル分解の類推で，成分におけるスペクトル分解を考える．成分 s_{mn} の k 番目のスペクトルを以下のように定義する．

$$s_{mn}(k) := \lambda_k \theta_{mk} \phi_{nk}.$$

すると成分 s_{mn} に関するスペクトル分解は以下のように計算できる．

$$s_{mn} = \sum_{k=1}^{K} s_{mn}(k) = s_{mn}(1) + \cdots + s_{mn}(K).$$

準備として，Kronecker デルタ δ_{kl} を以下のように定義する．

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{if } l = k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

成分の絶対値の二乗 $|s_{mn}|^2$ について，成分のスペクトル分解を利用して式展開する．

$$\begin{aligned} |s_{mn}|^2 &= \left(\sum_{k=1}^{K} s_{mn}(k)\right)\left(\sum_{l=1}^{K} s_{mn}^*(l)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{K} |s_{mn}(k)|^2 + \sum_{k,l=1}^{K} (1-\delta_{kl}) s_{mn}(k) s_{mn}^*(l) \\ &= \sum_{k=1}^{K} |s_{mn}(k)|^2 + \varepsilon_{mn}(k) \\ &= \sum_{k=1}^{K} \lambda_k^2 |\theta_{mk}|^2 |\phi_{nk}|^2 + \varepsilon_{mn}(k). \end{aligned} \tag{5}$$

ここで，$\varepsilon_{mn}(k)$ は $\varepsilon_{mn}(k) = \sum_{l=1}^{K}(1-\delta_{kl}) s_{mn}(k) s_{mn}^*(l)$ である．

正規化特異値分解における分解した行列の成分の絶対値の二乗 $|s_{mn}|^2$, λ_k^2, $|\theta_{mk}|^2$, $|\phi_{nk}|^2$ について，それぞれは確率で表記できる．

$$\begin{aligned} p(m, n) &= |s_{mn}|^2, \qquad & p(k) &= \lambda_k^2, \\ p(m \mid k) &= |\theta_{mk}|^2, \qquad & p(n \mid k) &= |\phi_{nk}|^2. \end{aligned}$$

したがって，式 (5) は確率表記を用いて以下のように計算でき，これが確率的特異値分解の定式化となる．

$$p(m, n) = \sum_{k=1}^{K} p(m \mid k) p(n \mid k) p(k) + \varepsilon_{mn}(k). \tag{6}$$

式 (6) について，因子 $\sum_{k=1}^{K} p(m \mid k) p(n \mid k) p(k)$ は PLSA を表している．PLSA は LDA の前身的なモデルであり，潜在変数クラスに属している．混合比 $p(k)$ は寄与率とも呼ばれ，潜在次元 k のモデルに対する影響度を説明できる．一方で，因子 $\varepsilon_{mn}(k)$ は負の値をとることができ，式 (6) は負の値を許容した確率モデルである．

確率的特異値分解を確率的行列分解モデルで表現するため，式 (6) を行列で表現する．任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ および行列 A の成分の絶対値の二乗の表記を，アダマール積の演算子 $\circ$ を用いて $\boldsymbol{a}^{\circ 2}$, $A^{\circ 2}$ と表記する．行列表記における確率的特異値分解は，以下のように定式化できる．

$$S^{\circ 2} = \Theta^{\circ 2} \Lambda^2 \Phi^{\circ 2 \dagger} + E. \tag{7}$$

ここで，$\varepsilon_{mn} = \Sigma_{k=1}^{K} \varepsilon_{mn}(k)$ とし，行列 E は $E = (\varepsilon_{mn}) \in \mathbb{R}^{M \times N}$ である．行列 E を誤差項と見做すと，式 (7) は確率的行列分解に誤差項を加えたモデルとなる．

シンポジウム報告書（タイトル:ワイブル-拡張 sine-skewed フォンミーゼス分布をコンポーネントに持つ隠れマルコフモデル)

宮田　庸一 *　　塩濱　敬之 †　　阿部　俊弘 ‡

1　はじめに

Θ は $-\pi$ 以上 π 未満の値を取る角度変数とし, X は非負値もしくは実数値をとる確率変数とする．組 (Θ, X) の確率分布は, シリンダー上の統計モデルと呼ばれている．このため, シリンダー値を取るデータとは, $[-\pi, \pi) \times \mathbb{R}_+$ もしくは $[-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ 上の値をとるデータのことを指している．実際, このようなデータは環境学, 生物学, スポーツなど様々な分野で見ることができ, 様々な研究者により解析がなされている．風向と二酸化硫黄 SO_2 の集中度に関しては, García-Portugués et al. (2014) により研究されている．またアドリア海の海流の方向とスピードに対しては, Lagona et al. (2015) により, Abe and Ley (2017) により提案されたシリンダー上の統計モデルをコンポーネントに持つ隠れマルコフモデルを通じて, 解析がなされている．シリンダー上の統計モデルとして, いくつかの提案がなされている．Johnson and Wehrly (1978) では, 確率変数の組 $(\Theta, X) \in [-\pi, \pi) \times \mathbb{R}_+$ の確率密度関数として, 以下のものを提案している．

$$f_{JW1}(\theta, x) = \frac{(\lambda^2 - \kappa^2)^{1/2}}{2\pi} \exp\left(-\lambda x + \kappa x \cos(\theta - \mu)\right),$$

ただし $\lambda > 0,\ 0 \leq \kappa < \lambda$ とする．彼らは, その一方で, 以下のような確率密度関数も提案している:

$$f_{JW2}(\theta, x) = C \frac{e^{-\kappa^2/(4\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + \frac{\kappa x}{\sigma^2}\cos(\theta - \mu)\right\},$$

ただし $\sigma > 0,\ \kappa \geq 0,\ C^{-1} = 2\pi\left\{I_0\left(\frac{\kappa\mu'}{\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\kappa^2}{4\sigma^2}\right) + 2\sum_{i=1}^{\infty} I_i\left(\frac{\kappa^2}{4\sigma^2}\right) I_{2i}\left(\frac{\kappa\mu'}{\sigma^2}\right)\right\}$, $I_\alpha(z)$ は α 次の第 1 種変形ベッセル関数とする．上記の式からわかるように, 1 番目のシリンダー上の分布は, パラメーター空間に制約が入っており, 2 番目のシリンダー上の分布は, 正規化定数が特殊関数

* 高崎経済大学　経済学部
† 南山大学 理工学部・データサイエンス学科
‡ 法政大学 経済学部

の無限和で表されるため, 最尤推定量など求めるために確率密度関数を通じた評価が必要な場合には, やや取り扱いのしにくい形になっていることがわかる．一方で Abe and Ley (2017) は, 非常にシンプルな正規化定数を持つ (X, Θ) の確率密度関数を提案した:

$$f_{AL}(\theta, x) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{2\pi\cosh(\kappa)}\left(1 + \lambda\sin(\theta - \mu)\right)x^{\alpha-1}\exp\left\{-(\beta x)^{\alpha}\left(1 - \tanh(\kappa)\cos(\theta - \mu)\right)\right\}, \quad (1)$$

ただし $x \geq 0$, $\cosh(\kappa) = \{\exp(\kappa) + \exp(-\kappa)\}/2$, and $\tanh(\kappa) = \{\exp(\kappa) - \exp(-\kappa)\}/\{\exp(\kappa) + \exp(-\kappa)\}$ とする．またパラメーターの空間は $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\kappa > 0$, $-\pi \leq \mu < \pi$, $-1 \leq \lambda \leq 1$ となっており, 複雑な制約が入っていない.

(1) の密度関数においては, Θ の周辺分布が λ を歪みパラメータに持つ正弦関数摂動巻き込みコーシー分布 (Abe and Pewsey, 2011) になっているため, 単峰非対称なデータにも対応できる形になっている．しかしながら, 実際には, 正弦関数摂動巻き込みコーシー分布ではとらえきれない強い歪みを持つシリンダー上のデータが存在し, そのときの歪みパラメータに対する最尤推定量は, パラメーター空間の境界上の値を取ることが知られている.

2 主な報告内容

この問題に対処するために, シンポジウムでは Miyata et al. (2024) により提案された以下の形の (Θ, X) の結合密度関数を提案した:

$$f^{(q)}_{WeiESSvM}(\theta, x) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{\pi\cosh(\kappa)}G_q(\lambda\sin(\theta - \mu))x^{\alpha-1}\exp\left\{-(\beta x)^{\alpha}\left(1 - \tanh(\kappa)\cos(\theta - \mu)\right)\right\}, \quad (2)$$

ただし $x \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\kappa > 0$, $-\pi \leq \mu < \pi$, $-1 \leq \lambda \leq 1$ とし, $\boldsymbol{H} = \{(\mu, \kappa, \lambda, \alpha, \beta) | -\pi \leq \mu < \pi, \kappa > 0, -1 \leq \lambda \leq 1, \alpha > 0, \text{ and } \beta > 0\}$ をパラメーター空間とする．また

$$g_q(x) = \frac{\Gamma(2(q+1))}{2^{2q+1}\Gamma(q+1)^2}(1 - x^2)^q \qquad (-1 \leq x \leq 1),$$

とおき, $G_q(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} g_q(t)dt$ をその分布関数とする．ここでは, この分布をワイブル-拡張正弦関数摂動フォンミーゼス (Extended Sine-Skewed von Mises (WeiESSvM)) 分布と呼ぶ．ここで $q \geq 0$ は事前に決めておくべき超パラメーターとし, ここではオーダーと呼ぶ．この分布の Θ および X の周辺分布, Θ を与えたときの X の条件付き分布, X を与えたときの Θ の条件付き分布は陽に表すことができる．さらに, Θ 側の観測データの分布が比較的強い歪みを示すときにも, オーダーを適切に選ぶことにより, よいデータフィッティングを与えることができる．この良さを示すために, 京都大学防災研究所潮岬風力実験所で計測された標本サイズ $T = 426$ の風向, 風速データに対して, この分布をコンポーネントに持つ隠れマルコフモデルを最尤法によりフィットさせた．さらに最大対数尤度および赤池情報量規準で比較した結果から, 従来の Lagona et al. (2015) のモデルよりも良好なデータフィッティングを持つことを報告した.

Cauchy sine-skewed circular distributions and their simple EM algorithm

Toshihiro Abe*
Faculty of Economics, Hosei University
and
Tomoaki Imoto†
School of Management and Information, University of Shizuoka

Modeling skewness in circular data is crucial for accurately representing phenomena in various scientific fields. Sine-skewed circular distributions, as a type of perturbed skew-symmetric distribution [1], have been recognized for their ability to model skewness in circular data. These distributions are characterized by a probability density function of the form:

$$f(\theta) = (1 + \lambda \sin \theta) f_0(\theta), \quad -\pi \leq \theta < \pi, \tag{1}$$

where the base density function $f_0(\theta)$ represents a symmetric circular probability density function centered at $\theta = 0$, and the parameter $\lambda \in [-1, 1]$ controls the skewness of the distributions. Recent extensions [6, 4] have explored additional flexibility, though these models still face certain limitations, such as restrictions on parameter ranges and the inability to cover half-circular distributions. Additionally, the absence of explicit solutions for parameter estimation in skewed circular models complicates their application.

Parameter estimation for circular distributions is often complex, with the solution to the likelihood equation seldom available in a simple form, except for the von Mises distribution. While the maximum likelihood estimate of the von Mises distribution is straightforward, other circular distributions typically require numerical calculation algorithms. For instance, the algorithm for maximum likelihood estimation of the wrapped Cauchy distribution is provided in [5], but there has been limited research on estimation algorithms for other circular distributions.

In this study, we have derived a stochastic representation of skewed circular distributions using symmetric circular ones which works not only contributes to the theoretical foundation of circular statistics but also offers practical methods for parameter estimation and model fitting. From the representation, the models are constructed similarly to sine-skewed circular distributions, allowing for simple random number generation. Furthermore, we proposed the Cauchy sine-skewed circular distributions with a skew parameter that takes whole real values. Specifically, we considered the Cauchy sine-skewed von Mises

*Toshihiro Abe was supported in part by JSPS KAKENHI Grant Number 19KK0287 and 19K11869.
†Tomoaki Imoto was supported in part by JSPS KAKENHI Grant Number 24K06849.

and Cauchy sine-skewed wrapped Cauchy distributions. We also derived explicit representations of the EM algorithm for parameter estimation and accelerated the estimation process using the vector epsilon algorithm by making use of those simple expressions.

One challenge encountered was the slow convergence of the skew parameter $\hat{\lambda}$, particularly in highly skewed data sets like the Periwinkle data. This slow convergence persists even at very high accuracy levels, suggesting that the EM algorithm's performance may be suboptimal in such scenarios. To address this, we propose exploring reparameterization strategies, such as transforming λ to $\sinh(\lambda)$, which may stabilize the estimation process.

Future research could explore extending the Cauchy sine-skewed models to cylindrical distributions, where the angular component follows the proposed models. Additionally, exploring alternative perturbations, such as the t-distribution, could yield new models with different properties, expanding the toolkit available for circular data analysis. Another promising direction involves extending the model proposed by [3] and [2] to multivariate settings, where the interaction between multiple angular components could be modeled using our Cauchy sine-skewed framework. Such extensions could provide valuable insights in fields ranging from directional statistics to environmental modeling.

In conclusion, the developments presented in this study not only enhance our understanding of skewed circular distributions but also offer practical tools for their application. These contributions lay the groundwork for further advancements in directional data analysis, with wide-ranging implications across various scientific disciplines.

References

[1] T. Abe and A. Pewsey. "Sine-skewed circular distributions". In: *Statistical Papers* 52.3 (2011), pp. 683–707.

[2] Toshihiro Abe et al. "On Some Flexible Models for Circular, Toroidal, and Cylindrical Data". In: *Directional Statistics for Innovative Applications: A Bicentennial Tribute to Florence Nightingale*. Springer, 2022, pp. 229–243.

[3] T. Imoto and T. Abe. "Simple construction of a toroidal distribution from independent circular distributions". In: *Journal of Multivariate Analysis* (2022). In press.

[4] S. Kato and M.C. Jones. "A tractable and interpretable four-parameter family of unimodal distributions on the circle". In: *Biometrika* 102 (2015), pp. 181–190.

[5] J. T. Kent and D. E. Tyler. "Maximum likelihood estimation for the wrapped Cauchy distribution". In: *Journal of Applied Statistics* 15.2 (1988), pp. 247–254.

[6] Yoichi Miyata, Takayuki Shiohama, and Toshihiro Abe. *An extension of sine-skewed circular distributions*. 2024. eprint: `arXiv:2402.09788`.

計数時系列の Whittle 法

柿沢佳秀 (北大経済)，曾小強 (Guangdong University of Education)

1．はじめに 1980 年代後半から 90 年代初期に計数時系列モデリングがはじまり，2000 年代の後半にリバイバルされて，その統計的推測理論も進展した (レビューとして，Weiß(2008，2018)，白石 (2022) などを参照されたい)．Al-Osh and Alzaid(1987) が，Steutel and van Harn(1979) による二項間引き (binomial thinning) に基づき１次の (非負) 整数値自己回帰 (INAR(1)) 過程 $Y_t = \alpha \circ Y_{t-1} + \varepsilon_t$ を導入し，その強定常性及びエルゴード性も Du and Li(1991) で示された．Du and Li(1991) は，さらに，p 次の (非負) 整数値自己回帰 (INAR(p)) 過程

$$Y_t = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \circ Y_{t-k} + \varepsilon_t\,, \quad t = 0, \pm 1, \ldots$$

を導入し，その強定常性及びエルゴード性も示した．以下，この条件を仮定した:

(A): $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)^\top \in [0,1)^p$ は $1_p^\top \boldsymbol{\alpha} < 1$ を満たす．ここに，$1_p = (1, \ldots, 1)^\top \in \mathrm{R}^p$.

慣例により，(非負) 整数値 innovation 過程 $\{\varepsilon_t\}$ の平均，分散をそれぞれ $\mu_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^2$ と記す．また，$\boldsymbol{\theta} = (\mu_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^2, \boldsymbol{\alpha}^\top)^\top$，$\boldsymbol{\theta}' = (\mu_\varepsilon, \boldsymbol{\alpha}^\top)^\top$ とおく．平均が $\mu_Y = \mu_\varepsilon/(1 - 1_p^\top \boldsymbol{\alpha})$ となり，Du and Li の定義の場合, 通常な p 次の (実数値) 自己回帰 (AR(p)) 過程と同じ相関構造を持つ．すなわち，ラグ h の自己共分散関数 $\gamma_Y(h) = E_\theta[(Y_t - \mu_Y)(Y_{t+h} - \mu_Y)]$ についてユール・ウォーカー (YW) 方程式

$$\gamma_Y(h) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \gamma_Y(k)\alpha_k + \nu_p\,, & h = 0\,, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \gamma_Y(|h-k|)\alpha_k\,, & h = 1, 2, \ldots\,, \end{cases}$$

が成立する．ここに，$\nu_p = \mu_Y \sum_{k=1}^{p} \alpha_k(1 - \alpha_k) + \sigma_\varepsilon^2$ とする．従って，μ_Y と $\gamma_Y(h)$ を標本平均 $\overline{Y} = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} Y_t$ とラグ h の標本自己共分散 $\widehat{\gamma}_Y(h) = n^{-1}\sum_{t=1+h}^{n}(Y_{t-h} - \overline{Y})(Y_t - \overline{Y})$，$0 \le h < n$ で置き換えて，YW 推定量 $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{YW} = (\widehat{\mu}_{\varepsilon;YW}, \widehat{\sigma}^2_{\varepsilon;YW}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{YW}^\top)^\top$ が得られる;

$$\widehat{\mu}_{\varepsilon;YW} = \overline{Y}(1 - 1_p^\top \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{YW})\,, \quad \widehat{\sigma}^2_{\varepsilon;YW} = \widehat{\gamma}_Y(0) - \sum_{k=1}^{p} \widehat{\gamma}_Y(k)\widehat{\alpha}_{k,YW} - \overline{Y}\sum_{k=1}^{p} \widehat{\alpha}_{k,YW}(1 - \widehat{\alpha}_{k,YW})\,.$$

また，$E_\theta[Y_t | Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-p}] = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k Y_{t-k} + \mu_\varepsilon$ が成立し，条件付き最小二乗 (CLS) 法 (Klimko and Nelson(1978)) で，CLS 推定量 $\widehat{\boldsymbol{\theta}'}_{CLS} = (\widehat{\mu}_{\varepsilon;CLS}, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{CLS}^\top)^\top$ が得られる．Du and Li(1991)，Latour(1998)，Silva and Silva(2006) などを参照されたい．なお，2 段階最小二乗 (2CLS) 法 (Karlsen and Tjøstheim(1988)) により，σ_ε^2 を推定する．

他方，INAR(p) 過程のスペクトル密度は

$$f_Y(\omega) = \frac{\nu_p}{2\pi |1 - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \mathrm{e}^{i\omega k}|^2}\,, \quad \omega \in (-\pi, \pi]$$

となる (Latour(1998) を参照)．Silva and Oliveira(2004) はポアソン innovation に対し INAR(1) 過程の Whittle 尤度最大化の数値実験 (Zhang and Wang(2015) はランダム係数 INAR(1) 過程で考察) を与えたが，彼らは漸近論なしであったから，本報告では Whittle 推定量の強一致性

を証明し，さらに YW 推定量と CLS/2CLS 推定量との漸近同等性を示すことで理論的根拠を与えた．

注意．(i) 本報告では innovation 過程 $\{\varepsilon_t\}$ に対して (高次) モーメントの存在のみを仮定し，特定の母数的な分布形を仮定しないので，最尤法を適用できない．この意味から，一般的な innovation の下での INAR(p) 過程の推測はセミパラメトリックな扱いとなり，YW/CLS 推定，及び，Whittle 推定はこのカテゴリーに入る．

(ii) この枠組みでの漸近有効推定量については，Drost et al.(2009) を参照されたい．

2．INAR(p) 過程における Whittle 推定量　ここでは，(demean をしない) ピリオドグラム

$$\begin{aligned} I_Y^\bullet(\omega) &= \frac{1}{2\pi n}\Big|\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\mu_Y)\mathrm{e}^{-it\omega}\Big|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[\widehat{\gamma}_Y^\bullet(0)+\sum_{h=1}^{n-1}\widehat{\gamma}_Y^\bullet(h)(\mathrm{e}^{-ih\omega}+\mathrm{e}^{ih\omega})\Big] \end{aligned}$$

を用いた．ここに，$\widehat{\gamma}_Y^\bullet(h)=n^{-1}\sum_{t=1+h}^{n}(Y_{t-h}-\mu_Y)(Y_t-\mu_Y)$，$0\le h<n$ とする．一般的な innovation の下で INAR(p) 過程の母数 $\boldsymbol{\theta}$ の同時推測をするため，以下で定義される Whittle 尤度最大化を考えた:

$$\begin{aligned} L_W^\bullet &= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\log f_Y(\omega)+\frac{I_Y^\bullet(\omega)}{f_Y(\omega)}\Big]\,d\omega \\ &= -\frac{1}{2}\Big[\log\frac{\nu_p}{2\pi}+\frac{1}{\nu_p}\sum_{i,j=0}^{p}\alpha_i\alpha_j\widehat{\gamma}_Y^\bullet(|i-j|)\Big] \quad \text{(便宜上，}\alpha_0=-1\text{ と約束)} \\ &\le -\frac{1}{2}\Big[\log\frac{J_Y}{2\pi}+1\Big] \quad \text{（ここに，}J_Y=\textstyle\sum_{i,j=0}^{p}\alpha_i\alpha_j\widehat{\gamma}_Y^\bullet(|i-j|)\text{ とする）.} \end{aligned}$$

なお，この等号は $\sigma_\varepsilon^2=J_Y-\mu_Y\sum_{k=1}^{p}\alpha_k(1-\alpha_k)=\varsigma_Y$ (say) に限る．すなわち，$\widehat{\boldsymbol{\theta}'}_W$ は J_Y の最小化で定義されて，$\widehat{\sigma}_{\varepsilon;W}^2=\varsigma_Y(\widehat{\boldsymbol{\theta}'}_W)$.

以下，真値を $\boldsymbol{\theta}_0=(\mu_{\varepsilon,0},\sigma_{\varepsilon,0}^2,\boldsymbol{\alpha}_0^\top)^\top$ と記し，$\boldsymbol{\theta}_0'=(\mu_{\varepsilon,0},\boldsymbol{\alpha}_0^\top)^\top$.

主結果 [Zeng(2024; INAR(1) 過程) を INAR(p) 過程へ僅かに拡張; Zeng and Kakizawa(2024?)].

$\boldsymbol{\theta}'=(\mu_\varepsilon,\boldsymbol{\alpha}^\top)^\top$ のコンパクトな母数空間 $\Theta'=I_{\mu_\varepsilon}\times A_{(\delta)}$ を考える．なお，$0<\delta<1$，$I_{\mu_\varepsilon}=[\mu_{\varepsilon,L},\mu_{\varepsilon,U}]$ $(0<\mu_{\varepsilon,L}<\mu_{\varepsilon,U}<\infty)$，$A_{(\delta)}=\{\boldsymbol{\alpha}\in I_{\alpha_1}\times\cdots\times I_{\alpha_p}|\ 1_p^\top\boldsymbol{\alpha}\le 1-\delta\}$，及び，$j=1,\ldots,p$ に対して $I_{\alpha_j}=[\alpha_{j,L},\alpha_{j,U}]$ $(0<\alpha_{j,L}<\alpha_{j,U}<1)$ とする．

- 1．P_{θ_0} の下で，$\sup_{\theta'\in\Theta'}|J_Y(\boldsymbol{\theta}')-q(\boldsymbol{\theta}')|\xrightarrow{a.s.}0$．ここに，

  $$q(\boldsymbol{\theta}')=\sum_{i,j=0}^{p}\alpha_i\alpha_j\gamma_Y(|i-j|;\boldsymbol{\theta}_0)+(1-1_p^\top\boldsymbol{\alpha})^2\{\mu_Y(\boldsymbol{\theta}')-\mu_Y(\boldsymbol{\theta}_0')\}^2\,.$$

  2．任意の $\boldsymbol{\theta}'\in\Theta'$ に対し $q(\boldsymbol{\theta}')\ge q(\boldsymbol{\theta}_0')$ が成立する (等号は $\boldsymbol{\theta}'=\boldsymbol{\theta}_0'$ に限る).

  3．$\widehat{\boldsymbol{\theta}'}_W\xrightarrow{a.s.}\boldsymbol{\theta}_0'$，$\widehat{\sigma}_{\varepsilon;W}^2\xrightarrow{a.s.}q(\boldsymbol{\theta}_0')-\mu_Y(\boldsymbol{\theta}_0')\sum_{k=1}^{p}\alpha_{k,0}(1-\alpha_{k,0})=\sigma_{\varepsilon,0}^2$.

- さらに，$\boldsymbol{\theta}_0'=(\mu_{\varepsilon,0},\boldsymbol{\alpha}_0^\top)^\top$ が Θ' の内点であるならば，$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_W=\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{YW}+O_p(n^{-2})$．そして，$(\widehat{\mu}_{\varepsilon;W},\widehat{\sigma}_{\varepsilon;W}^2)^\top=(\widehat{\mu}_{\varepsilon;YW},\widehat{\sigma}_{\varepsilon;YW}^2)^\top+O_p(n^{-1})$.

なお，驚きでないが,『YW』『CLS/2CLS』『W』は漸近的に同じ正規分布となる．

3．おわりに　(i) ベクトル INAR(p) 過程への拡張について補足した．さらに，(ii) 符号付き (一般化) 間引きによる整数値時系列の既存研究の現状を，手短にレビューした．

How to evaluate performance based on the Foster-Hart risk measure

Jiro Hodoshima*
Faculty of Economics, Nagoya University of Commerce and Business

Toshiyuki Yamawake†
Faculty of Economics, Nagoya University of Commerce and Business

September, 2024

Abstract

We compare two classes of performance measures based on the Foster-Hart risk measure and extended Foster-Hart risk measure. One class of performance measures is the reciprocal of the Foster-Hart risk measure and extended Foster-Hart risk measure. Another class is the performance measure modifying the Sharpe ratio with standard deviation replaced by the Foster-Hart risk measure and extended Foster-Hart risk measure. We also compare these two classes of performance measures with the traditional performance measures of the Sharpe ratio and Sortino ratio. We present simulation comparisons of the two classes of performance measures, Sharpe ratio, and Sortino ratio as well as empirical examples using stock data. We show the former class is superior to the latter class as the performance measure retaining the intrinsic nature of the Foster-Hart and extended Foster-Hart risk measures, which are extremely sensitive to the disaster risk but insensitive to gains.

*Corresponding author. Address correspondence to: Jiro Hodoshima, Faculty of Economics, Nagoya University of Commerce and Business, 4-4 Sagamine, Komenoki-cho, Nisshin-shi, Aichi 470-0193, Japan E-mail:hodoshima@nucba.ac.jp; ORCID ID:0000-0002-7913-4110; Tel: +81 561-73-2111 Fax: +81 561-73-1202

†Toshiyuki Yamawake, Faculty of Economics, Nagoya University of Commerce and Business, 4-4 Sagamine, Komenoki-cho, Nisshin-shi, Aichi 470-0193, Japan; E-mail: yamawake@nucba.ac.jp; Tel: +81-561-73-2111 Fax: +81-561-73-1202

JEL codes: G11; C22; C46; C63

Keywords: performance measure; Foster-Hart risk measure; extended Foster-Hart risk measure; Sharpe ratio; Sortino ratio

Declaration of interest: none

Funding: This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number 22K01586

Availability of data and material: data is available from the corresponding author

多群正規分布モデルにおける平均と分散を同時推測する多重比較法

南山大学大学院理工学研究科　都竹凛花
南山大学理工学部　白石高章
南山大学理工学部　松田眞一

1　はじめに

本研究の対象である多重比較法は，どの群とどの群の間に違いがあるのかを検出できる手法である．基本的なテューキー・クレーマー (Tukey (1953), Kramer (1956)) の方法やダネット (Dunnett (1955)) の方法，シェフェ(Scheffé (1953)) の方法などに加えて，様々な状況設定に対応した多重比較法が考案されている．また，正規分布を仮定した多群モデルにおける多重比較法の文献で述べられている方法は，平均または分散どちらかに関するものである．そこで，本研究では平均と分散を同時に考えた，多群正規分布モデルにおける平均と分散を同時推測する多重比較法について考察する．この場合，平均を推測する統計量と分散を推測する統計量は独立でないため小標本の理論はボンフェロー二の不等式を使った検出力の弱い方法しか提案できない．本発表では，漸近理論によって検出力の高い手法を提案した．また，適用事例の紹介を当日行なった．

2　内容

ある要因 A があり，k 個の水準 $A_1, \cdots, A_k$ を考える．水準 A_i における標本の観測値 $(X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{in_i})$ を第 i 群とよび，X_{ij} は正規分布 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ に従うとする．さらにすべての X_{ij} は互いに独立であると仮定する．総群サイズを $n \equiv n_1 + \cdots + n_k$ とおく．平均 μ_i と分散 σ_i^2 の一様最小分散不偏推定量を，それぞれ，$\bar{X}_{i\cdot}$, $\tilde{\sigma}_i^2$ とする．

k 個の水準の母平均と母分散のすべての比較を考える．$1 \leq i < i' \leq k$ となる (i, i') に対して，1 つの比較のための検定は，

$$\text{帰無仮説 } H_{(i,i')} : \mu_i = \mu_{i'} \text{ かつ } \sigma_i^2 = \sigma_{i'}^2 \quad \text{vs. 対立仮説 } H^A_{(i,i')} : \mu_i \neq \mu_{i'} \text{ または } \sigma_i^2 \neq \sigma_{i'}^2$$

であった．$\mathcal{U}_k$ を $\mathcal{U}_k \equiv \{(i, i') \mid 1 \leq i < i' \leq k\}$ で定義した．

$(i, i') \in \mathcal{U}_k$ と $\boldsymbol{\theta} \equiv (\mu_1, \cdots, \mu_k, \sigma_1^2, \cdots, \sigma_k^2)$ に対して，$U_{ii'}(\boldsymbol{\theta})$, $V_{ii'}(\boldsymbol{\theta})$ を

$$U_{ii'}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{i'\cdot} - (\mu_i - \mu_{i'})}{\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_i^2}{n_i} + \frac{\tilde{\sigma}_{i'}^2}{n_{i'}}}}, \quad V_{ii'}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\log \tilde{\sigma}_i^2 - \log \tilde{\sigma}_{i'}^2 - (\log \sigma_i^2 - \log \sigma_{i'}^2)}{\sqrt{\frac{2}{n_i} + \frac{2}{n_{i'}}}}$$

とおき，$A(t|k) \equiv k \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Phi(x) - \Phi\left(x - \sqrt{2} \cdot t\right) \right\}^{k-1} d\Phi(x)$ とした．ただし，$\Phi(x)$ は標準正規分布の分布関数とする．このとき，次の補題 1 を得た．

補題 1　条件：$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n_i}{n}=\lambda_i>0\quad(i=1,\cdots,k)$ の下で，$t_1>0,\ t_2>0$ に対して，

$$A(t_1|k)A(t_2|k)\le\lim_{n\to\infty}P\left(\max_{1\le i<i'\le k}|U_{ii'}(\boldsymbol{\theta})|\le t_1,\ \max_{1\le i<i'\le k}|V_{ii'}(\boldsymbol{\theta})|\le t_2\right)$$

が成り立つ．□

$A(t|k)$ に対して，

$$A(t|k)=1-\alpha \text{ を満たす } t \text{ の解を } a(k;\alpha)$$

とした．

$0<\alpha<1$ に対して，α^* を $\alpha^*\equiv 1-\sqrt{1-\alpha}$ で定義した．このとき，補題 1 より，次の同時信頼区間を得た．

[1] 信頼係数 $1-\alpha$ の漸近的な同時信頼区間

$\{\mu_i-\mu_{i'}\ ,\ \log\sigma_i^2-\log\sigma_{i'}^2|\ (i,i')\in\mathcal{U}_k\}$ の信頼係数 $1-\alpha$ の漸近的な同時信頼区間は，

$$\bar{X}_{i\cdot}-\bar{X}_{i'\cdot}-a(k;\alpha^*)\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_i^2}{n_i}+\frac{\tilde{\sigma}_{i'}^2}{n_{i'}}}\le\ \mu_i-\mu_{i'}\ \le\ \bar{X}_{i\cdot}-\bar{X}_{i'\cdot}+a(k;\alpha^*)\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_i^2}{n_i}+\frac{\tilde{\sigma}_{i'}^2}{n_{i'}}},$$

$$\log\tilde{\sigma}_i^2-\log\tilde{\sigma}_{i'}^2-a(k;\alpha^*)\sqrt{\frac{2}{n_i}+\frac{2}{n_{i'}}}\le\ \log\sigma_i^2-\log\sigma_{i'}^2\ \le\ \log\tilde{\sigma}_i^2-\log\tilde{\sigma}_{i'}^2+a(k;\alpha^*)\sqrt{\frac{2}{n_i}+\frac{2}{n_{i'}}}$$

$((i,i')\in\mathcal{U}_k)$ によって与えられた．□

[1] を基にして，$\left\{\text{帰無仮説 } H_{(i,i')} \text{ vs. 対立仮説 } H^A_{(i,i')}\ \middle|\ (i,i')\in\mathcal{U}_k\right\}$ に対する水準 α の漸近的なシングルステップ多重比較検定とマルチステップ多重比較検定を得た．

すべての平均と分散に関する多重比較法として，$\{\mu_i\ ,\ \log\sigma_i^2|\ 1\le i\le k\}$ の信頼係数 $1-\alpha$ の漸近的な同時信頼区間を得た．さらに，この同時信頼区間を基に，シングルステップの多重比較検定を導き，このシングルステップの多重比較検定を優越する逐次棄却型検定法を論じた．

参考文献

(1) 岩永英志・古賀祐亮 (2021). 『多標本の正規分布モデルにおける平均と分散の同時相違検出のための統計的推測法』 南山大学理工学部卒業論文.

(2) Dunnett, C. W. (1955). A multiple comparison procedure for comparing several treatments with a control. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **50**, 1096–1121.

(3) Hayter, A. J. (1984). A proof of the conjecture that the Tukey-Kramer multiple comparisons procedure is conservative. *Ann. Statist.*, **12**. 61–75.

(4) Kramer, C. Y. (1956). Extension of multiple range tests to goup means with unequal numbers of replications. *Biometrics*, **8**. 75-86.

(5) Scheffé, H. (1953). A method for judging all contrasts in analysis of variance. *Biometrika* **40**, 87-104.

(6) Tukey，J. W. (1953). *The Problem of Multiple Comparisons. The Collected Works of John W. Tukey (1994),* **Vol. VIII** *Multiple Comparisons.* Chapman and Hall.

多重比較の礎

ノンパラメトリック法からパラメトリック法へ

南山大学理工学部　白石高章

小標本でも分布に依存しない統計量の漸近理論 (大標本理論) による近似的な手法をデータ解析に適用する場合，その近似の良さ (収束の速さ) は，分布に依存しない特長を持っている．更に小標本でも分布に依存しない順位に基づくノンパラメトリック統計量は，漸近理論の収束も速く外れ値と分布の崩れに対する頑健性を持っている．Hájek and Šidák (1967) は，スコア関数を導入し，ウィルコクソンの順位検定を一般化した順位検定の理論を構築し専門書としてまとめている．その書籍に書かれている漸近理論は Chernoff and Savage (1958) とは異なる数学のエレガントな技法によって記述されており，名著となっている．本発表では，先ず，多重比較法の基礎として，次の多群連続モデルを考えた．

ある要因 A があり, k 個の水準 $A_1, \ldots, A_k$ を考え，水準 A_i における標本の観測値 $(X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{in_i})$ は第 i 標本または第 i 群とよばれ, 平均が μ_i である同一の連続型分布関数 $F(x-\mu_i)$ をもつとした．すなわち,

$$P(X_{ij} \leq x) = F\left(x-\mu_i\right), \ \ E(X_{ij}) = \mu_i$$

であった．$F(x)$ は未知であってもよいものとする．分散は存在しなくてもよいとした．$f(x) \equiv F'(x)$ とおくと, $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0$ が成り立つ．さらにすべての X_{ij} は互いに独立であると仮定した．総群サイズを $n \equiv n_1 + \cdots + n_k$ とおいた．

まづは k 個の水準の平均母数のすべての比較を考えた．1 つの比較のための検定は

$$\text{帰無仮説 } H_{(i,i')}:\ \mu_i = \mu_{i'} \text{ vs. 対立仮説 } H^A_{(i,i')}:\ \mu_i \neq \mu_{i'}$$

となる．$\mathcal{U}_k$ を

$$\mathcal{U}_k \equiv \{(i,i') \mid 1 \leq i < i' \leq k\}$$

で定義する．帰無仮説 $H_{(i,i')}$ vs. 対立仮説 $H^A_{(i,i')}$ に対して帰無仮説のファミリー $\mathcal{H}_T$ は

$$\mathcal{H}_T \equiv \{H_{(i,i')} \mid 1 \leq i < i' \leq k\} = \{H_{\boldsymbol{v}} \mid \boldsymbol{v} \in \mathcal{U}_k\}$$

と表現できる．2 群間の標本観測値の中で順位をつける順位検定が, スティール・ドゥワスによって提案されている．$N_{i'i} \equiv n_{i'} + n_i$ 個の観測値 $X_{i1}, \cdots, X_{in_i}, X_{i'1}, \cdots, X_{i'n_{i'}}$ を小さい方から並べたときの $X_{i'\ell}$ の順位を, $R^{(i',i)}_{i'\ell}$ とする．$a_{N_{i'i}}(\cdot)$ を $\{1, 2, \cdots, N_{i'i}\}$ から実数へのスコア関数とした．

$$T_{i'i} \equiv \sum_{\ell=1}^{n_{i'}} a_{N_{i'i}}\left(R^{(i',i)}_{i'\ell}\right) - n_{i'}\bar{a}_{N_{i'i}}$$

とおく. ただし，$\bar{a}_{N_{i'i}} \equiv (1/N_{i'i})\sum_{m=1}^{N_{i'i}} a_{N_{i'i}}(m)$ とする．このとき，順位統計量

$$\widehat{Z}_{i'i} \equiv \frac{T_{i'i}}{\sigma_{i'in}}, \quad \sigma_{i'in} \equiv \sqrt{\frac{n_i n_{i'}}{N_{i'i}(N_{i'i}-1)} \sum_{m=1}^{N_{i'i}} \left\{a_{N_{i'i}}(m) - \bar{a}_{N_{i'i}}\right\}^2} \ \ ((i,i') \in \mathcal{U}_k)$$

を基にした小標本でも分布に依存しないノンパラメトリック法を述べた．その場合，すべての平均相違に関する同時信頼区間と多重比較検定に限定して詳細に論述した．

薬の増量や毒性物質の暴露量の増加により母平均に順序制約を入れることができる場合が多い．一般に，順序制約のあるモデルでの多重比較法は，順序制約のないモデルでの多重比較法を大きく優越する．このため，順序制約のあるモデルでノンパラメトリック法を考察することは非常に有意義である．これにより，母平均に順序制約を入れた場合の分散分析に対応するノンパラメトリック法と小標本でも分布に依存しないノンパラメトリック多重比較法についても論述した．因みに，特定の分布を仮定し母平均に順序制約を入れたパラメトリックモデルで，母平均が一様である帰無仮説の統計的検定理論と母平均の点推定理論を研究した日本の数理統計学者は非常に多い．

尺度母数だけを統計分析する分布に依存しない順位手法は平均が既知でなければ提案することができないためデータ解析の適用できる範囲が少ない．これにより，本書では尺度母数だけのノンパラメトリック法は取り上げなかった．

稀におこる現象の回数はポアソン分布に従う．ポアソン分布に従う観測値のデータはいくらでも存在する．ポアソンモデルの統計手法は重要であるにもかかわらず，ポアソンモデルでこれまで提案されてきた統計解析手法はまだ十分多く提案されているとはいえない．待ち行列で用いられている指数分布モデルや比率の解析のためのベルヌーイモデルの統計解析法もポアソンモデルの場合と同様に少ない．ポアソン分布，指数分布，ベルヌーイ分布は 1 母数を持つ分布である．第 3 節に，これら 1 母数を持つ分布モデルにおける新しい統計解析法を，第 2 節に論述した統計理論と同様な方法によって構築した．

第 4 節に，2 以上の母数を持つ正規分布を仮定した多標本モデル，2 元配置モデル，相関係数の統計解析法を論述した．それらの数学的な理論構築のために，第 2 節に解説したノンパラメトリック理論を活用できる．正規分布以外の 2 以上の母数を持つパラメトリック分布モデルで統計解析法を論じることは難しい．1933 年にド・モアブルが導入した正規分布 (ガウス分布) がいかに統計学の発展に貢献しているかが分かった．

第 5 節は紹介したすべての多重比較検定を取り込むゲートキーピング法について述べた．

以上のすべての内容は以下の著書に記述されている．

著書

(著 1) 白石高章 (2011). 『多群連続モデルにおける多重比較法 ―パラメトリック，ノンパラメトリックの数理統計―』 南山大学学術叢書，共立出版

(著 2) 白石高章 (2012). 『統計科学の基礎 ―データと確率の結びつきがよくわかる数理―』 日本評論社

(著 3) 白石高章, 杉浦洋 (2018). 『多重比較法の理論と数値計算 』 共立出版

(著 4) Shiraishi, T., Sugiura, H., and Matsuda, S. (2019). *Pairwise Multiple Comparisons ―Theory and Computation―*. SpringerBriefs in Statistics.

(著 5) Shiraishi, T. (2022). *Multiple Comparisons for Bernoulli Data.* SpringerBriefs in Statistics.

(著 6) 白石高章 (2025). 『ノンパラメトリック統計学 ―小標本でも分布によらないロバスト手法―』 南山大学学術叢書，共立出版

Fréchet regression による非ユークリッド空間上のデータ解析

慶應義塾大学理工学研究科　飯田優希
慶應義塾大学理工学部　白石博
東京都立大学経済経営学部 小方浩明

1　イントロダクション.

[Petersen and Müller, 2019] は Fréchet 平均の概念を条件付き分布に一般化し, 非ユークリッド空間上の反応変量に対する最小二乗法とノンパラメトリック回帰手法を開発した.(それぞれ Global Fréchet Regression, Local Fréchet Regression と呼ばれる.) 本研究では Local Fréchet Regression に焦点を当て, ヒルベルト空間に限定した場合のモデルと, 方向データへの応用を考える.

1.1 設定.

(Ω, d) を距離空間とする. ランダムペア $(X, Y) \sim F$ を考える. ここで X, Y はそれぞれ $\mathbb{R}^p, \Omega$ の値をとり, F は $\mathbb{R}^p \times \Omega$ 上の (X, Y) の同時分布である. $\mu = \mathrm{E}[X]$ と $\Sigma = \mathrm{Var}(X)$ が存在し, Σ は正定値であると仮定する. [Petersen and Müller, 2019] は $X = x$ が与えられたもとでの Y の Fréchet 回帰関数を導入した.

$$m_\oplus(x) = \arg\min_{\omega \in \Omega} M_\oplus(\omega, x), \qquad M_\oplus(\cdot, x) = \mathrm{E}[d^2(Y, \cdot)|X = x], \tag{1.1}$$

(1.2) は $\Omega = \mathbb{R}$ の場合の通常の回帰問題における回帰関数 $m(x) = \mathrm{E}[Y|X = x]$ の拡張になっており, $m_\oplus(x)$ を推定するノンパラメトリック回帰モデルが local Fréchet regression model[Petersen and Müller, 2019] である.

1.2 Local Fréchet Regression model.

以下では $p = 1$ とする. Local Fréchet Regression model は $\Omega = \mathbb{R}$ の場合の局所線形回帰の理論から導かれる. カーネル関数 K, バンド幅 h に対し, $K_h(\cdot) = h^{-1}K(\cdot/h)$ と定める. さらに, $\mu_j = \mathrm{E}[K_h(X-x)(X-x)^j]$, $r_j = \mathrm{E}[K_h(X-x)(X-x)^j Y]$, $\sigma_0^2 = \mu_0\mu_2 - \mu_1^2$ と定め, 重み関数 s を $s(z, x, h) = \frac{1}{\sigma_0^2} K_h(z - x)\{\mu_2 - \mu_1(z - x)\}$ で定義する. local Fréchet regression model[Petersen and Müller, 2019] は以下で定義される.

$$\tilde{l}_\oplus(x) = \arg\min_{\omega \in \Omega} \tilde{L}_n(\omega), \quad \tilde{L}_n(\omega) = \mathrm{E}[s(X, x, h)d^2(Y, \omega)] \tag{1.2}$$

ここで, n はバンド幅の列 $h = h_n$ に対するものである.

1.3 推定.

$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n) \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} F$ とし, $\tilde{l}_\oplus(x)$ の推定量として次を考える.

$$\hat{l}_\oplus(x) = \arg\min_{\omega \in \Omega} \hat{L}_n(\omega), \quad \hat{L}_n(\omega) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} s_{in}(x, h)d^2(Y_i, \omega) \tag{1.5}$$

ここで, $s_{in}(x, h) = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} K_h(X_i - x)[\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1(X_i - x)]$, $\hat{\mu}_j = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_h(X_i - x)(X_i - x)^j$, $\quad \hat{\sigma}_0^2 = \hat{\mu}_0\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2$.

2　ヒルベルト空間における LFR.

$\hat{l}_\oplus(x)$ の漸近分布は明示的に導出することができないため, Ω をヒルベルト空間に限定したモデルについて考える.

命題 1. Ω がヒルベルト空間のとき, $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n) \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} F$ に対し,

$$\hat{l}_\oplus(x) = \arg\min_{\omega \in \Omega} \hat{L}_n(\omega) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} s_{in}(x, h)Y_i. \tag{2.1}$$

実数反応変量に対するノンパラメトリック回帰モデルを Ω が一般のヒルベルト空間である場合に拡張する.

定義 1. (ノンパラメトリック回帰モデル (Ω : ヒルベルト空間))

$$Y = m_\oplus(X) + \sigma(X)\varepsilon. \tag{2.2}$$

ここで, ε は Ω 上の確率要素であり, X と独立で, $\forall\omega \in \Omega, \mathrm{E}[\langle\varepsilon, \omega\rangle] = 0, \quad \mathrm{E}[\|\varepsilon\|_\Omega^2] = \mathrm{E}[\langle\varepsilon, \varepsilon\rangle] = 1.$
また, $\sigma^2(x) = \mathrm{E}[d^2(Y, m_\oplus(x))|X = x]$.

定理 1. Ω を実ヒルベルト空間とし, (2.2) のモデルからのランダム標本 $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ が得られたとする. 適当な仮定のもと, $\forall\omega \in \Omega$ に対し,

$$\sqrt{nh}\left\{\left\langle \hat{l}_\oplus(x) - m_\oplus(x),\ \omega\right\rangle - \left(\frac{\int u^2 K(u)du}{2}\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle m_\oplus(x), \omega\rangle\right)h^2\right\} \rightsquigarrow N\left(0,\ \frac{\int K^2(u)du}{f(x)}\sigma^2(x)\mathrm{E}[\langle\varepsilon, \omega\rangle^2]\right).$$

3 Ω から H_k へ.

正定値カーネルを用いて, ヒルベルト空間でない Ω 上のデータを再生核ヒルベルト空間 (RKHS) に写し. RKHS 上で解析することを考える. $k : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ を集合 Ω 上の正定値カーネルとし, H_k を正定値カーネル k により定まる RKHS とする. さらに $\Phi : \Omega \to H_k$ を $\Phi(x) = k(\cdot, x)$ により定める. データ $Y_i \in \Omega$ を Φ で変換することにより, H_k 上のデータ $\{\Phi(Y_i)\}_{i=1}^n = \{k(\ \cdot\ , Y_i)\}_{i=1}^n$ が得られる. $Y \in \Omega$ を Φ で変換した $\Phi(Y) \in H_k$ と X に対し, 以下のノンパラメトリック回帰モデルを考える.

定義 2. (RKHS H_k 上のノンパラメトリック回帰モデル)

$$\Phi(Y) = m_\oplus^{H_k}(X) + \sigma(X)\varepsilon. \tag{3.1}$$

ここで, ε は H_k 上の確率要素であり, X と独立で, $\forall f \in H_k, \mathrm{E}[\langle\varepsilon, f\rangle] = 0, \quad \mathrm{E}[\|\varepsilon\|_{H_k}^2] = \mathrm{E}[\langle\varepsilon, \varepsilon\rangle] = 1.$
また, $\sigma^2(x) = \mathrm{E}[d^2(\Phi(Y), m_\oplus^{H_k}(X))|X = x]$.

正定値カーネル k が, $\underset{f \in H_k}{\arg\min}\, \mathrm{E}[d^2(\Phi(Y), f)|X = x] = \Phi(m_\oplus(x))$ を満たすとき, $m_\oplus^{H_k}(x) = \Phi(m_\oplus(x))$ となる. 以下ではこのような k を考える. (4.1) のモデルからのランダム標本 $(X_1, \Phi(Y_1)), \ldots, (X_n, \Phi(Y_n))$ に対して LFR を考えると,

$$\hat{l}_\oplus^{H_k}(x) = n^{-1}\sum_{i=1}^n s_{in}(x, h)\Phi(Y_i). \tag{3.2}$$

さらに, $\hat{l}_\oplus^{H_k}(x) \in H_k$ を以下の最小化問題によって, Ω 上の要素に対応させる.

$$\hat{l}_\oplus^k(x) = \underset{\omega \in \Omega}{\arg\min}\ \underbrace{d(\hat{l}_\oplus^{H_k}(x), \Phi(\omega))^2}_{\left\langle \hat{l}_\oplus^{H_k}(x) - \Phi(\omega), \hat{l}_\oplus^{H_k}(x) - \Phi(\omega)\right\rangle} = \underset{\omega \in \Omega}{\arg\min}\left\{k(\omega, \omega) - 2n^{-1}\sum_{i=1}^n s_{in}(x, h)k(Y_i, \omega)\right\} \tag{3.3}$$

4 方向データへの応用.

方向データとはデータの各観測値が方向や角度を表すもので, その周期性により通常の実数値データに対する統計的手法が意味をなさない場合がある. 一方, Fréchet Regression はデータ間の距離を用いるため, 方向データも適切に解析することができると考えられる. 今回は球面上のデータを例に取り, 以下の設定のシミュレーションにおいて LFR の有用性を確かめ, RKHS に写す手法を用いて球面上の信頼領域の構成を試みた.
$\Omega = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ とする. ここで, $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_E = 1\}$. regression function は以下を考える.

$$m_\oplus(x) = \left((1 - x^2)^{1/2}\cos(\pi x), (1 - x^2)^{1/2}\sin(\pi x), x\right), \qquad x \in (0, 1) \tag{4.1}$$

参考文献

[1] Ashis, S. and BarryC, A. (2022). *Directional Statistics for Innovative Applications (A Bicentennial Tribute to Florence Nightingale)*. Springer, New York.

[2] Petersen, A. and H.-G. Müller (2019) Fréchet regression for random objects with Euclidean predictors, *Annals of Statistics*, **47**, 691-719.

[3] van der Vaart, A (1998) *Asymptotic Statistics*. Cambridge university press.

V-statistic for high-dimensional time series

Yosei Yoshida
(Graduate School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University)
Yan Liu
(Department of Applied Mathematics, Waseda University)

In this research, we consider the problem of testing for homoscedasticity in high-dimensional time series. Testing hypothesis concerning covariance matrices plays an important role in high-dimensional time series analysis. (Nagao 1973) has proposed the following test statistic

$$V = \frac{1}{p}\mathrm{tr}\left[(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{I}_p)^2\right] \tag{0.1}$$

for the hypothesis of $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}_p$, where $\boldsymbol{S}$ is the sample covariance matrix and $\boldsymbol{I}_p$ denotes the p-dimensional identity matrix. This test statistic is so-called the V-statistic in the literature. Let $\{\boldsymbol{X}(t) = ((X_1(t), X_2(t), \ldots, X_p(t))^\top; t \in \mathbb{Z}\}$ be a p-dimensional Gaussian stationary process with the p-dimensional mean vector $\boldsymbol{\mu}$ and $p \times p$ covariance function $\boldsymbol{R}(h) := (R_{ij}(h))$. We address the challenge of testing for the homoscedasticity:

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\boldsymbol{I}_p \quad \text{vs.} \quad K : \boldsymbol{\Sigma} \neq \sigma^2\boldsymbol{I}_p, \qquad \sigma^2 > 0, \tag{0.2}$$

when both the sample size n and the dimension p diverge to infinity with the asymptotic regime $p/n \to c \in (0, \infty)$.

We review the asymptotic results of high-dimensional time series and some assumptions. Denote the observation stretch by $\boldsymbol{X}(1), \boldsymbol{X}(2), \ldots, \boldsymbol{X}(N)$ obtained from the process $\{\boldsymbol{X}(t)\}$. The sample covariance matrix now is

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{N}(\boldsymbol{X}(t) - \bar{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}(t) - \bar{\boldsymbol{X}})^\top,$$

where $n = N - 1$ and $\bar{\boldsymbol{X}} = (1/N)\sum_{t=1}^{N}\boldsymbol{X}(t)$.
Assumption $\sum_{h=-\infty}^{\infty}|h||R_{ij}(h)| < \infty \qquad$ for every $i, j = 1, \ldots, p$.
Assumption There exists a constant c such that $p/n \to c \in (0, \infty)$ as $n \to \infty$, $p \to \infty$.

Suppose two Assumptions hold. Under the null hypothesis $H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\boldsymbol{I}_p$, we obtain

$$\sqrt{np}B^{-1/2}[V - \Delta_v] \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

where

$$B = 8 \cdot (1-\sigma^2)^2 \cdot \left\{ (p^{-1}) 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{tr} \boldsymbol{f}(\lambda)^2) \mathrm{d}\lambda \right\}$$
$$+ c \cdot 16 \cdot (1-\sigma^2) \cdot \left\{ (p^{-2}) \sum_{h_1=-\infty}^{\infty} \sum_{h_2=-\infty}^{\infty} \mathrm{tr} \left[\boldsymbol{R}(-h_1-h_2) \otimes (\boldsymbol{R}(h_1)\boldsymbol{R}(h_2)) \right] \right\}$$
$$+ c \cdot 4 \cdot \left\{ p^{-2} (2\pi)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tr} \left[\boldsymbol{f}(\lambda)\boldsymbol{f}(\mu) \otimes \boldsymbol{f}(\lambda)\boldsymbol{f}(\mu) \right] \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}\mu \right\}$$
$$+ c^2 \cdot 8 \cdot \left\{ (p^{-3}) \sum_{h_1=-\infty}^{\infty} \sum_{h_2=-\infty}^{\infty} \sum_{h_3=-\infty}^{\infty} \mathrm{tr} \left[\boldsymbol{R}(-h_1-h_2-h_3) \otimes \boldsymbol{R}(h_1) \otimes (\boldsymbol{R}(h_2)\boldsymbol{R}(h_3)) \right] \right\},$$

and

$$\Delta_v = \left(\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - 1 \right)^2 - 2 \left(\frac{\sigma^2}{n^2} + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{1}{n} \right) \left\{ (p^{-1}) 2\pi \mathrm{tr} \boldsymbol{f}(0) \right\} - \frac{p}{n^2} \left\{ p^{-2} (2\pi)^2 (\mathrm{tr} \boldsymbol{f}(0))^2 \right\}$$
$$+ \frac{N}{n^2} \left\{ (p^{-1}) 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{tr} \boldsymbol{f}(\lambda)^2) \mathrm{d}\lambda \right\} + \frac{Np}{n^2} \left\{ (p^{-2}) 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \mathrm{tr} \boldsymbol{f}(\lambda) \right\}^2 \mathrm{d}\lambda \right\}$$
$$- \frac{p}{n^2} \left\{ p^{-2} \sum_{h=-\infty}^{\infty} |h| (\mathrm{tr} \boldsymbol{R}(h))^2 \right\}.$$

This result shows the asymptotic normality of the test statistic V under the asymptotic regime with a bias correction Δ_v.

Participating in this symposium has been beneficial to my research. Beyond the optimization problem for the portfolio analysis, we would like to develop some new disciplines as our research goal. In addition, the optimality of our test statistic is still not established for various settings of alternative hypotheses. We thank the audience from the floor for providing these insights into our ongoing research project.

References

Anderson, T. W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis.* John Wiley, New York.

Birke, M. and Dette, H. (2005). A note on testing the covariance matrix for large dimension. *Statistics & Probability Letters* **74** 281–289.

Ledoit, O. and Wolf, M. (2002). Some hypothesis tests for the covariance matrix when the dimension is large compared to the sample size. *The Annals of Statistics* **30** 1081–1102.

Liu, Y., Tamura, Y. and Taniguchi, M. (2018). Asymptotic Theory of Test Statistic for Sphericity of High-Dimensional Time Series. *Journal of Time Series Analysis* **39** 402–416.

Muirhead, R. J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory.* John Wiley and Sons Inc., New York.

Nagao, H. (1973). On some test criteria for covariance matrix. *The Annals of Statistics* 700–709.

一般線形モデルにおけるベイズ線形推定量の研究

九州大学大学院 マス・フォア・イノベーション連係学府　穆佐 飛来

正の整数 m_1, m_2 に対して，$\mathcal{M}(m_1, m_2)$ を $m_1 \times m_2$ 行列の集合とする．正の整数 m に対して，$\mathcal{S}^+(m)$ で $m \times m$ 正定値対称行列の集合，$\mathcal{S}^N(m)$ で $m \times m$ 非負定値対称行列の集合を表し，$\mathbf{0}_m$ を全ての成分が 0 の m 次元ベクトルとする．さらに，$\mathrm{E}_\tau[\cdot]$ は τ についてその事前分布に関する期待値をとるものとする．また，$\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表す．

本講演を通して，ランダムな観測 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して，次の一般線形モデルを考える:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathrm{E}[\boldsymbol{y}] = \mathbf{0}_n, \quad \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\boldsymbol{\Omega}.$$

ここで，$\boldsymbol{X} \in \mathcal{M}(n,k)$ は既知の計画行列で $\mathrm{rank}(\boldsymbol{X}) = k < n$ を満たし，$\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^k$ は未知の回帰係数ベクトル，$\sigma^2 \in (0,\infty)$ は未知のスカラー，$\boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{S}^+(n)$ は既知の行列である．

特に，$(\sigma^2, \boldsymbol{\beta})$ に $\gamma = \mathrm{E}_{\sigma^2}[\sigma^2], \boldsymbol{W} = \mathrm{E}_{\boldsymbol{\beta}}[\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^\top]$ を満たす事前分布を想定したもとで，ベイズ線形推定量は $\boldsymbol{\beta}$ の線形推定量 $\boldsymbol{L}^\top\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$ の総平均二乗誤差に関する不等式

$$\mathrm{E}_{\boldsymbol{\beta},\sigma^2}\left[\mathrm{E}[\|\boldsymbol{L}_*^\top\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}\|^2 |\, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2]\right] \le \mathrm{E}_{\boldsymbol{\beta},\sigma^2}\left[\mathrm{E}[\|\boldsymbol{L}^\top\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}\|^2 |\, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2]\right] \quad \text{for any } \boldsymbol{L} \in \mathcal{M}(n,k)$$

を満たす $\boldsymbol{L}_*^\top\boldsymbol{y}$ として表現される．実際，ベイズ線形推定量は一般的に次のように定式化される:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_B(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{K}) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{X}^\top(\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}^\top)^{-1}\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{\Phi} \in \mathcal{S}^+(n),\ \boldsymbol{K} \in \mathcal{S}^N(k).$$

なお，$\boldsymbol{\beta}$ の推定量としてこれまでに通常のリッジ推定量 (Hoerl and Kennard, 1970 a,b) や縮小推定量 (Mayer and Willke, 1975)，及び一般リッジ推定量 (Rao, 1975) が多くの論文で議論されてきたが，これらの不偏とは限らない推定量は全てベイズ線形推定量及びその極限を含めた拡張ベイズクラスに含まれている (Rao, 1976)．また，fractional rank 推定量やある種の線形制約付き最小二乗推定量もこのクラスに含まれている (LaMotte, 1978)．本講演では二乗損失を考えたもとでの線形推定量のクラスにおける許容性のほか，線形十分性や線形完備性の観点 (線形十分性や線形完備性の定義については例えば Drygas (1983) を参照) からベイズ線形推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_B(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{K})$ の統計的性質について議論する．

以降，$\boldsymbol{\Phi} \in \{\boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{\Omega}\}$ を考える．本講演では，与えられた $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2 \in \mathcal{S}^N(k)$ に対して

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_B(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{K}_1) = \hat{\boldsymbol{\beta}}_B(\boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{K}_2) \quad \text{for any } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

が成立する必要十分条件を導出する．(1) が成立する場合，左辺の推定量が線形許容性などの意味で最適ならば，右辺の推定量もその意味で最適である．既存研究として，Tsukuda and Kurata (2020) や Mukasa and Tsukuda (2024) では一般リッジ推定量を考えたもとでの等価性について議論している．特に，$\boldsymbol{K} \in \mathcal{S}^+(k)$ のとき一般リッジ推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_G(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{K})$ はベイズ線形推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_B(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{K}^{-1})$ の形で書けることから $\boldsymbol{K} \notin \mathcal{S}^+(k)$ の場合の条件に興味がある．

さらに，σ^2 の二次推定量に関して，一般化残差平方和を考えることがしばしばある．ここでは，ベイズ線形推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_B(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{K})$ を考えたもとでの一般化残差平方和

$$RSS_B(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{K}) = \left\|\boldsymbol{\Phi}^{-1/2}\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_B(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{K})\right)\right\|^2, \quad \boldsymbol{\Phi} \in \mathcal{S}^+(n),\ \boldsymbol{K} \in \mathcal{S}^N(k)$$

について，与えられた $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2 \in \mathcal{S}^N(k)$ に対して，

$$RSS_B(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{K}_1) = RSS_B(\boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{K}_2) \quad \text{for any } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

が成立する必要十分条件を導出する. また, (1) と (2) を同時に満たす同値条件についても当日報告する. なお, 前者については Mukasa and Tsukuda (2024) が, 後者については Tsukuda and Kurata (2020) が一般リッジ推定量に置き換えたもとで必要十分条件をそれぞれ求めている.

参考文献

Drygas, H. (1983). Sufficiency and completeness in the general Gauss–Markov model. *Sankhyā Ser. A* **45**, no.1, 88–98.

Hoerl, A. E., Kennard, R. W. (1970a). Ridge regression: biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics* **12**, no.1, 55–67.

Hoerl, A. E., Kennard, R. W. (1970b). Ridge regression: applications to nonorthogonal problems. *Technometrics* **12**, no.1, 69–82.

LaMotte, L. R. (1978). Bayes linear estimators. *Technometrics* **20**, no.3, 281–290.

Mayer, L. S., Willke, T. A. (1975). On biased estimation in linear models. *Technometrics* **15**, 497–508.

Mukasa, H., Tsukuda, K. (2024). Equality between two general ridge estimators and equivalence of their residual sums of squares. arXiv:2405.20023v2

Rao, C. R. (1975). Simultaneous estimation of parameters in different linear models and applications to biometric problems. *Biometrics* **31**, 545–553.

Rao, C. R. (1976). Estimation of parameters in a linear model. *Ann. Statist.* **4**, no.6, 1023–1037.

Tsukuda, K., Kurata, H. (2020). Covariance structure associated with an equality between two general ridge estimators. *Statist. Papers* **61**, no.3, 1069–1084.

GMANOVA モデルの最尤推定量における新たな罰則付き推定とその最適化

中京大学 教養教育研究院 永井 勇

n 個の各個体に対して，時間と共に測定されたデータは経時測定データと呼ばれ，非常に多くの分野で分析されている (例えば柳原・吉本 (2003))．このような経時測定データにおいて，全ての個体で p 回測定しその測定時点が揃っている場合，Potthoff and Roy (1964) により提案された次の一般化多変量分散分析（Generalized Multivariate ANalysis Of VAriance; GMANOVA）モデルを用いた分析がよくされている;

$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{X}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{X}' + \boldsymbol{\mathcal{E}}, \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{Y}$ は各行が各個体の経時測定データからなる $n \times p$ 既知行列，$\mathbf{1}_n$ は全ての要素が 1 の n 次元ベクトル，$\boldsymbol{\mu}$ は q 次元未知ベクトル，$\boldsymbol{X}$ は個体内計画行列と呼ばれる測定時点から作られる $\mathrm{rank}(\boldsymbol{X}) = q$ の $p \times q$ 既知行列 (実際にどのようなものを用いるかについての詳細は後述)，$\boldsymbol{A}$ は個体間計画行列と呼ばれる測定時点に無関係な各個体の特徴を表す説明変数からなる各列で中心化されている $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = k$ の $n \times k$ 既知行列とし，$\boldsymbol{\Xi}$ は $k \times q$ 未知行列であり，$\boldsymbol{\mathcal{E}}$ は $E[\boldsymbol{\mathcal{E}}] = \mathbf{0}_n \mathbf{0}_p'$ で $\mathrm{Cov}[\mathrm{vec}(\boldsymbol{\mathcal{E}})] = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{I}_n$ の $n \times p$ 誤差行列であり，$\mathbf{0}_r$ は全ての要素が 0 の r 次元ベクトル，$\boldsymbol{\Sigma}$ は未知の $p \times p$ 正則行列である．さらに，$\boldsymbol{\mathcal{E}}$ の各行は $N_p(\mathbf{0}_p, \boldsymbol{\Sigma})$ に従っているとし，$\boldsymbol{\Sigma}$ の不偏推定量 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{Y}'\{\boldsymbol{I}_n - \mathbf{1}_n\mathbf{1}_n'/n - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'\}\boldsymbol{Y}/(n-k-1)$ の逆行列が存在することを仮定する．

$\boldsymbol{Y}$ に潜む経時的な変動 (経時変動) を推定する際には，個体内計画行列 $\boldsymbol{X}$ の i 行目として，i 番目の測定時点 t_i $(i = 1, \ldots, p; t_1 < \cdots < t_p)$ の関数からなる行列が用いられる．例えば，$\boldsymbol{X}$ の i 行目として $(t_i^0, \ldots .t_i^{q-1})$ を用いて未知の $\boldsymbol{\mu}$ や $\boldsymbol{\Xi}$ を推定することで，全ての個体で共通の経時変動 $(\mathbf{1}_n\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{X}')$ や 各説明変数に対応する経時変動 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{X}')$ の切片と各次数の係数がそれぞれ推定でき，それらの結果として目的の $\boldsymbol{Y}$ に潜む経時変動を測定時点 t_i の $(q-1)$ 次多項式で推定できる．また，$\boldsymbol{X}$ の i 行目として t_i の他の形の関数からなるものを用いて $\boldsymbol{\mu}$ や $\boldsymbol{\Xi}$ を推定することで，用いた関数の重み付き和の形で全体の経時変動を推定できる．

このモデル (1) において，誤差に正規分布を仮定した下での $\boldsymbol{\mu}$ や $\boldsymbol{\Xi}$ の最尤推定量 (Maximum Likelihood Estimator: MLE) はそれぞれ以下で得られることが知られている;

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{Y}'\mathbf{1}_n/n, \ \hat{\boldsymbol{\Xi}} = (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}.$$

しかしながら，各個体の特徴間 ($\boldsymbol{A}$ の列間) に相関が高い組がある場合 や 経時変動の推定に用いる関数が柔軟すぎる場合 は，これらの推定量が不安定となってしまうなどの問題がある．前者の相関の影響により不安定になる問題を回避する手法は，$\boldsymbol{S}$ を $\boldsymbol{I}_p$ にした場合は Nagai (2011) などで提案され，MLE の場合については Yanagihara, Nagai, Fukui and Hijikawa (2023) により提案されている．一方で，後者の柔軟な関数を用いることにより起きる不安定になる問題を回避する手法は，$\boldsymbol{S}$ を $\boldsymbol{I}_p$ にした場合は永井 (2010) などで提案さ

れている．しかし，MLE の場合については提案されていない．そこで本研究では，MLE における前者と後者の問題を同時に解決するために，Hoerl and Kennard (1970) により提案されたリッジ型罰則付き推定量をモデル (1) へ拡張した推定量を提案し，そこで導入した罰則パラメータの最適化のための C_p 型の情報量規準を提案する (C_p 型情報量規準については Yanagihara and Satoh (2010) など参照).

数値実験を通じた比較なども講演で触れる予定である．また，そこでは柔軟な関数を用いることで起きる過剰適合と言われる問題が回避できているかを確認する予定である．

引用文献:

[1] Hoerl, A. E. & Kennard, R. W. (1970) Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, **12**, 55-67.

[2] 永井 勇 (2010) GMANOVA における直接的な罰則付推定法とその最適化，2010 年度統計関連学会連合大会 講演.

[3] Nagai, I. (2011) Modified C_p Criterion for optimizing ridge and smooth parameters in the MGR estimator for the nonparametric GMANOVA model. *Open Journal of Statistics*, **1**, 1–14.

[4] Potthoff, R. F. & Roy, S. N. (1964) A generalized multivariate analysis of variance model usefule specially for growth curve problems. *Biometrika*, **51**, 313–326.

[5] Yanagihara, H., Nagai, I., Fukui, K. & Hijikawa, Y. (2023) Ridge parameter optimization using a modified C_p statistic in multivariate generalized ridge regression for the GMANOVA model. *Procedia Comput. Sci.*, **225**, 27th International Conference on Knowledge-Based and Intelligent Information & Engineering Systems (KES-2023), (ed. R. Howlett), 1987-1996.

[6] Yanagihara, H. & Satoh, K. (2010) An unbiased C_p criterion for multivariate ridge regression. *Journal of Multivariate Analysis*, **101**, 1226–1238.

[7] 柳原 宏和・吉本 敦 (2003) 一般化多変量分散分析モデルの林木直径成長分析への適用可能性. 統計数理（特集：森林資源統計学）, **51**, 19-35.