強非周期タイルの発見

秋山 茂樹

1　スミス帽

図 1 のスミス帽という 13 角形を載せたプレプリント [5] が今や標準の科学論文発表サイトである ArXiv に公表されたのは今年の 3 月 20 日である。 図 1 の右側は $30°, 60°, 90°$ の三角定規二つの斜辺を合わせてできる凧型で分割し形を分かりやすくしたものである。辺の長さは 3 つでその比は $1 : 2 : \sqrt{3}$ となっているが、凧型分割でみれば二つでその比は $1 : \sqrt{3}$ とみることもできる。

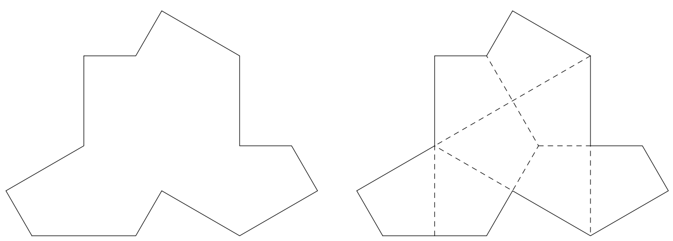

図 1: スミス帽

この論文の主張は、たとえば図 2 のようにこのタイル[1]で平面を敷き詰めることができるが、どのように敷き詰めても決して周期的にはならないというシンプルなものである。なおタイルは回転したり裏返して使うことも許される。図 2 で裏返しは白抜きで表示されている。

この驚くべき主張は歴史的な未解決問題への美しい解答であり、論文はまだ検証段階であるが非常に多くの注目を集めている。この論文の４人の著者のうち数学者はハイム・グッドマン-ストラウスの一名のみである。デイビッド・スミスは引退したタイル好きの印刷職人。クレイグ・カプランはタイルの計算を以前から行ってきた計算機科学者。ジョゼフ・マイヤーもタイルの研究をしてきた非常に強力なプログラマーである。遠隔講演の普及でこの結果に関する二度の講演を聞く機会を得たがグッドマン-ストラウスが最初に「この

[1]平面におけるタイルとは内部の閉包（通常の位相で）と一致する有界集合のことを言う。この定義では連結性も仮定されていないが、とりあえず多角形などを思い浮かべてほしい。タイル張りも直感的にわかるが、正確に述べれば有限種類のタイルによる平面の被覆であって二つのタイルは境界だけで交わるものである。

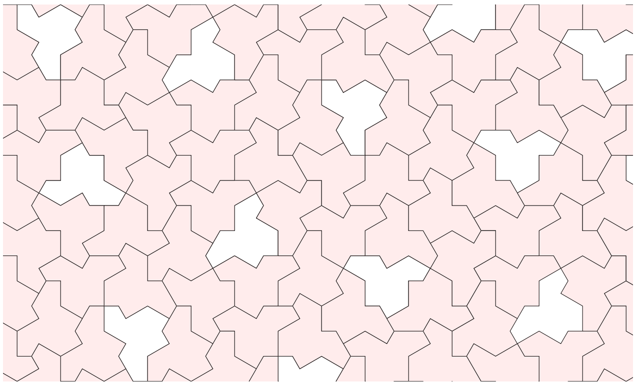

図 2: タイル張り

研究における自分の貢献は小さい」と述べたのが印象に残った。彼は謙虚な人なのだが、たしかにこの研究は数学者と他分野の研究者の素晴らしいチームワークの成果である。

2　非周期性と強非周期タイル集合

ベクトル v があって、タイル張りをすべて v だけ平行移動しても全体として同じタイル張りになるときに v をタイル張りの周期という。タイル張りが非周期的とは零ベクトル以外に周期がないことを言う。パッチとは固定したタイル張りに現れるタイルの有限集合、つまりタイル張りに現れるパターンである。

有限個のタイルの集合 $\mathcal{A}$ が強非周期性をもつとは $\mathcal{A}$ のタイルにより平面がタイル張りできるが、でき上がったタイル張りは全て非周期的であることをいう。本稿で登場するようなタイル張りでは一つの非零周期を持つならば二つの一次独立な周期を持つように変形できることが知られている。したがって基本領域（二重周期のパッチ）が存在することを周期性の定義として採用しても強非周期性の概念は等価になる。

タイル集合の非周期性 (aperiodicity) とタイル張りの非周期性 (non-periodicity) は非常に異なる概念だがよく誤解されるので特に注意してほしい。本稿ではタイル集合の aperiodicity は強非周期性と訳して区別することにしたい。

例として図 3 の椅子タイルを考えよう。置換を繰り返すことで図 4 のように自己相似タイル張りができる。

このタイル張りはのちに述べる唯一合併性を満たし非周期的である。しかし一方で椅子タイル二つを組み合わせると長方形が作れるので周期的タイル張りも可能である。したがって椅子タイルからなる一元集合は強非周期的ではない。

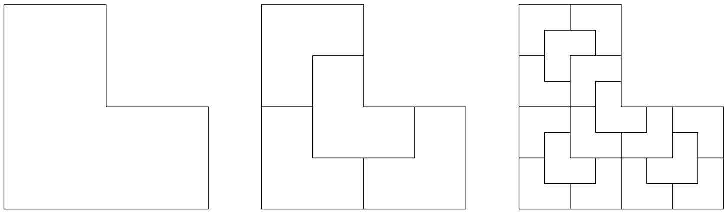

図 3: 椅子タイル

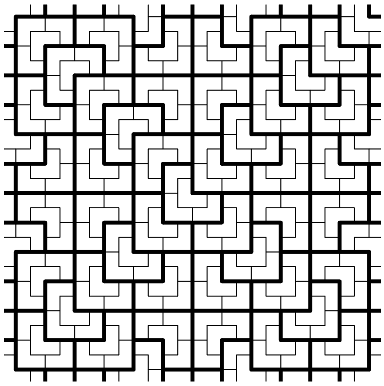

図 4: 椅子タイル張り

ペンローズタイルというのは図 5 の二枚の凧型タイルの組である。タイル張りを作るとき表面の円弧模様が連続して繋がるように配置する。このように張り合わせルールを指定すると、ペンローズタイルの集合は強非周期性を持つことが知られている。この張り合わせルールは辺にうまく凹凸をつけてやればタイルの形のみで強制できる。強非周期性を持つ二元集合は存在することになる。

アンマンは強非周期性をもつタイルの二元集合を他にもいくつか見つけている。では一元からなる集合で非周期性をもつものはあるだろうか。これが長い間未解決問題であった問題である。この問題のことを EinStein 問題と呼ぶこともある。物理学者アインシュタインとは関係なく、ドイツ語で ein Stein が「一つの石」を意味するからである。

3 以前に知られていた結果

このスミス帽の歴史的位置づけを理解するために過去にどのような研究があったかを紹介しよう。グリュンバウムとシェファードおよびセネカルの教科書 [2, 4] にも記述がある。

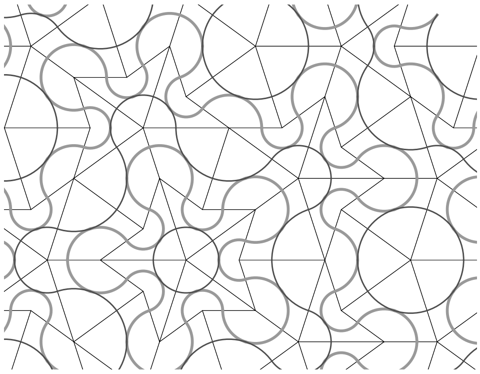

図 5: ペンローズタイル張り

おそらく強非周期性を初めて問題として提示したのはハオ・ワンである。４辺が色に塗られた正方形の有限集合を考えタイル張りを行う。張り合わせは同色の辺が向き合うように並べるのがルールである。タイルは平行移動のみ許され、回転したり裏返したりしてはいけない。

ワンはこのような強非周期性をもつ有限集合は存在しないと予想した。バーガーは 20426 個からなるタイル集合で予想の反例を発見した。以降このような強非周期性をもつタイル集合はワンタイルと呼ばれるようになる。ワンタイルの個数の最小値を探す問題が長らく多くの研究者の関心を集めてきた。カリはタイルを計算機に見立てる素晴らしいアイデアで 14 個[2]の例を提示した。さらにジャンデルとラオ [3] は最小値が 11 個であることを確定した。最小値の確定の過程ではカリのアイデアの一般化が有効に働く。強非周期性の発見に新しい数学的なアイデアが活躍するのはワンタイルの歴史でも非常に印象的である。

ワンタイルでは回転や裏返しは許されていない。回転や裏返しを許す問題も当然面白い。タイルに対して可能な操作を決めるということは等長変換群の部分群を指定することになる。等長変換は次元が高くなるとさまざまなものが現れるので、一定の制限を加えないと、比較的に容易に強非周期的モノタイル（一元からなる強非周期的タイル集合）が生じる。たとえば三次元ではネジのように無理的に回転しながら併進する等長変換が存在する。シュミット、コンウェイとダンザーはこれを強制するような強非周期的モノタイルを構成した。面白いことにグリーンフェルドとタオ [1] は平行移動のみに限定しても、十分に次元 d が高いとき、タイル張り可能であるが決して d 個の一次独立な周期を持たないようなタイルがあることを示した。

いずれにせよ低次元、特に二次元では本質的に面白い問題が残っている。回転や裏返しを許すとし、平面で強非周期モノタイル（あるいは EinStein）

[2]同じアイデアでクリックは 13 個に改良した。

が存在するかどうかは強い関心を集めてきた。テイラーとソコラー [7] は、六角形タイルに適切な隣接条件を加えると強非周期モノタイルとなることを示した。この結果は今回の論文 [5] にもっとも近い結果である。素晴らしい発見ではあるが張り合わせ条件が隣接しないタイルまで及ぶという小さい傷があった。もちろん有界な範囲にしか影響しない条件なのでこれでも数学的には十分とも言えるが、この隣接条件はペンローズタイルのように辺の形を変形することでは強制できない。このように隣接条件が少し難しいことが画竜点睛を欠く残念な感じを残していた。今回のスミス帽は辺での張り合わせ条件は不要で、形のみで強非周期性を実現しているのが非常に大きなポイントである。

4　スミス帽の自己相似構造

強非周期性の証明は二つのステップに分かれる。

- 与えられたタイルで平面がタイル張りできること。
- でき上がったタイル張りは必ず非周期的であること。

周期タイル張りが可能であることを示すには基本領域（周期となる平行四辺形状のパッチ）を与えてやればよい。しかし強非周期タイル集合であることを示そうとしているのだから、そもそも基本領域は見つからない。言い換えると基本領域が見つかったら強非周期タイル集合でないことが証明される。基本領域を見つけようとする努力は、命題の否定のみに役立ち、肯定を示すことには役に立たない。

強非周期性を示すためには、何らか別の方法でタイル張りが可能であることを証明する必要がある。そのために用いられるのが自己相似構造である。

グリュンバウムとシェファードは本稿の定義[3]を満たすタイルの有限集合がある場合、任意の大きさの半径の球を覆うパッチが作れれば平面全体をタイル張りすることができることを示した。したがって椅子タイルの例が示すような置換規則があるのならば、これを繰り返すことによりいくらでも大きい範囲がタイル張りされるので平面タイル張りが得られる。

スミス帽の第一の驚くべき点はその発見のされかたにある。これまで見つかってきた強非周期タイル集合は、置換規則など、周期を持たない仕組みを前提に設計されてきた。つまり答えを想定して問題を解こうと努力していた。しかしスミス帽は強非周期性否定のための類まれな探索、つまり基本領域を見つける探索を繰り返しどうしても見つからなかった強非周期性を持つタイルの候補をスミスがカプランに質問して研究が始まったのである。

この基本領域を見つけようとする作業は大変地道なもので、様々なタイルを次々輪状に配置していくだけなのである。これをコロナと名付けるのは自

[3] 少しだけ [2] より仮定が弱いが証明は同じ。

然だろう。もちろん厄災のコロナでなく金環食で見られる美しいコロナである。途中で不可能になったらなんどもやり直して何周もできるようにコロナを広げていく。もしコロナが何周目か以上どうしてもコロナが広がらないのならば、これはタイル張りができないので別の候補に移る。ただし全ての方法を尽くさなければならないので場合分けは非常に大変である。このようにしてどんどんコロナが広がるとし、ある段階でパターンの繰り返し、すなわち基本領域がみつかれば強非周期タイルでないことが示される。この場合も次の候補でやり直しということになる。この際限のない否定の繰り返しにいったいどれだけの時間が費やされたのだろう。このような壮大な探索を繰り返すことでスミス帽は「強非周期性をもつかもしれない候補」として何もないところから見つかったのである。発見者デイビッド・スミスの功績は非常に大きいというしかない。

具体的に多角形のタイルが一枚与えられたとして、もしも決してタイル張りができないのならばこのコロナの輪は有限で止まりそれ以上は大きくできない。ただ何段階のコロナまで作ればよいのだろうか。この数はタイルによって決まりヘーシュ数と呼ばれている。別の言い方をすればヘーシュ数が無限大ならばタイル張り可能であるが、無限大でないヘーシュ数の全体は有界なのだろうかという数学的な問題が生ずる。もし有界であればタイル張り可能性の判定条件を与えるのでこれも重要な問題である。ヘーシュ数が全ての自然数を取り得るかは未解決問題である。大きいヘーシュ数の世界記録は 6 である。スミス帽の 13 角形がこの世界記録を破ることにスミスは気が付き、ヘーシュ数の計算プログラムを作っていたカプランにこのタイルが強非周期性を持つかどうかを 2022 年の 11 月にメールで尋ねたのである。したがってスミス帽に置換規則があることはこの時点で未知であり、それを探しださなくてはならなかった。

スミス帽の第二の驚愕すべき性質はその拡大係数にある。スミス帽は結論から言うと極限において $(3+\sqrt{5})/2$（黄金比の平方）の相似比をもつ置換規則を持つ。六角格子上に頂点が配置されているが、六角格子は $(3+\sqrt{5})/2$ の相似比と非常に相性が悪い。数論を学んだ人には分かりやすいのだが、六角格子の頂点間距離は x^2+xy+y^2 という整数係数二次形式の平方根としてよい。x^2+xy+y^2 では 3 で割って 1 あまる素数しか表現できない。黄金比の平方を作るための素数である 5 が原理的に作れないのである。したがってこれを頂点としてタイルをいくら組み合わせても $(3+\sqrt{5})/2$ の相似比は実現できない。[5] ではこの困難は極限操作で乗り越えられる。つまりスミス帽は個別には黄金比の平方の相似比の置換規則は持たないが、その相似比を近似する置換規則を持つ。そして極限では黄金比の平方が実現されるのである。

この置換規則の発見はカプランのプログラムによる実験がなければ簡単ではない。大きなコロナを作り地道に規則を探すのである。すると、最初に気がつくのは裏返しのタイルが割に規則的に並んでいることである。そのこと

から出発し、いくつかのタイルをグループ化してパッチタイル[4]を構成する。そのパッチタイルがもつ置換規則を記述することで、図 6 のように全体に置換規則が働くことを証明するのである。図 6 では二種のパッチタイルを用いているが、論文においては強非周期性の証明のため主に四種のパッチタイルを用いている。

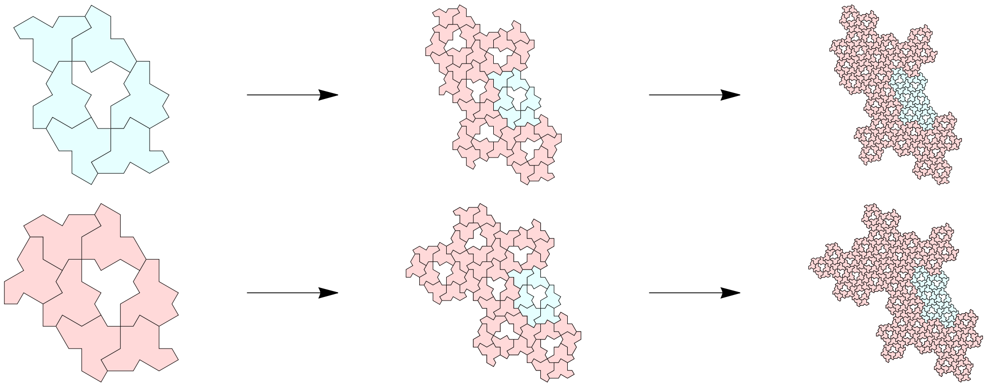

図 6: 置換規則

上述した黄金比と六角格子の問題のため、この置換規則は各レベルごとに少しずつ異なるものとなる。言い換えると置換規則が無限列を成しており、その極限が黄金比の平方の置換規則に収束する。このような構造になっているため本当に無限回適用可能であることを示すことも決して自明ではない。

5 強非周期性の証明

置換規則をもつタイル張りの非周期性を示すためのよく知られた方法は唯一合併性と呼ばれる性質である。自己相似構造によりパッチタイルが置換規則を満たすときこれを超タイルという。図 4 では太線で書かれたものが超タイルによるタイル張りである。超超タイルなども同様に定義される。置換規則を持つタイル張りが与えられたとき、超タイルの取り方が唯一であるならば唯一合併性を持つという。唯一合併性を持つ置換規則タイル張りは非周期的である。なぜなら、もし周期 v が存在するとしたとき、超超 $\cdots$ 超タイルについても一通りにタイル張りとみなすことができるが、そのような n 段階の超タイルは v の長さより直径の大きい円を含む。この円は v の平行移動で自分自身と交差してしまうのでそのような n 段階超タイルも自分自身と非自明に交わってしまい周期であることに反する。これにより椅子タイル張りは非周期的であることが分かる。

[4]タイル張りの有限個のパッチ集合 $\mathcal{A}$ が与えられ、タイル張りが $\mathcal{A}$ によるタイル張りとみなせるとき $\mathcal{A}$ に属するパッチのことをパッチタイルであるという。パッチタイルを規則がより分かりやすい形に変形したもののことを [5] ではメタタイルと呼んでいる。

強非周期性を示すにはスミス帽はなんらかのパッチタイル集合で記述されることをまず証明し、さらに、そのパッチタイル集合が唯一合併性のある置換規則を満たさなければならないことを示し、さらに超パッチタイルがもとのパッチタイルと同じ働きをする（隣接条件が相似比を除いて同じ）ことを示す必要がある。これらが示されると全てのスミス帽でできるタイル張りは全て唯一合併性をもつパッチタイルによるタイル張りであることになるので、スミス帽の一元集合は強非周期性を持つことが示されたことになる。

この証明は数学の論理としても深くなる。とくに超パッチタイルがもとのパッチタイルと**同じ働きをする**という部分を論理式で書くことも難しい。ここが強非周期性の証明の難読性を引き起こす。さらに証明の多くは図形的なタイル張り可能性から来ているので、数式計算の代わりにタイルのさまざまな配置をすることになる。さまざまな不可能配置を場合分けして示し、結果として超パッチタイル同士の隣接条件は、パッチタイルの隣接条件と同じであることを示すのである。これが強非周期性の証明の面倒で難しい部分で、数式の多い（論理的可読性が高い）論文に慣れた数学者にとっても難物となる。証明を読むにはタイルを実際に作って配置しながら理解することが勧められている。また、この場合分けの数が非常に大きいので人間が手で確認するのも困難である。彼らが最初に得た証明はこの面倒な場合分けをコンピュータによる全数探索に基づいて行ったものである。マイヤーはこの問題をプログラムして解くのに２週間しかかからなかったとのことであるが、この証明が本当に終了していることを確認するためには他のプログラマーが別個のプログラムを作って検証するしかないだろう。四色問題と同様で多くの数学者にはお手上げの感じがする解決を見たことになる。

6　新しい強非周期性の証明

スミス帽の第三番目の驚異的な事実は、このスミス帽は単独でなくパラメータを持つ族のなかの一部であることである。実際スミスは、このスミス帽以外に別の形を同様な探索でみつけており、同じようになかなか基本領域がみつからないと知っていた。これは他の３名の共著者を当初困惑させたようだ。

歴史的未解決問題にスミス一人で二つも異なる解を見つけたのか？

実はよく観察するとタイルが面白い変形を許すこと、そして変形の結果できるタイルは３つの例外を除いてすべて組合せ的には同値な非周期タイル張りを生み出すことが分かった。見つかったタイルはこの変形を介して結びついていたのである。

スミス帽の辺は $1:2:\sqrt{3}$ の比率を持っている。このうちの 2 の辺は $1+1$ と考えることもできるので本質的に $1:\sqrt{3}$ の比率を持つとしてよいことは最初に述べた。各タイルの境界に反時計回りに向きをつけ、辺をベクトルと

考える。すると長さ 1 の辺ベクトルの和は零であり、したがって長さ $\sqrt{3}$ の辺ベクトルの和も零となる。よって図 7 のように長さ $\sqrt{3}$ の辺を任意の正の長さ b に連続的に変えることができる。一つのタイル張りに対して組合せ的に同等に辺を一対一対応させれば、辺長の異なるタイル張りができ上がる。

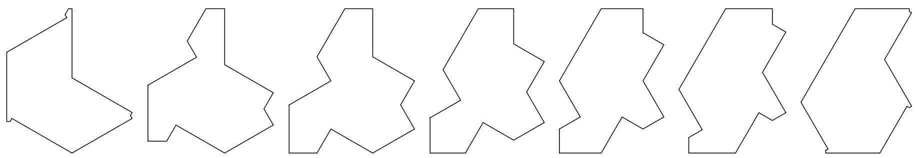

図 7: $(1:b)$ タイル。$(b = 20,\ 3,\ \sqrt{3},\ 1,\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{20})$

スミス帽には $(1:\sqrt{3})$ という比率が対応するが、一般に $(1:b)$ のタイルが作れることになる。このうち $(1:\infty)$, $(1:1)$, $(1:0)$ の三つの比を除くと全て強非周期性を持つタイルとなるのである。実際にこの 3 つの比の場合を除けば $(1:b)$ タイルででき上がるタイル張りの全体は組合せ的に同値なものになる。つまりスミス帽タイル張りと b の値の異なるタイル張りは本質的に同値であるので強非周期性を持つことに変わりない。この変形は一変数連続パラメータをもつ族である。なお、この b を取り換える変形はアフィン写像で実現できない。

スミス帽の第四番めの驚異的な事実は、このパラメータ族の存在から全く新しいタイプの強非周期性の証明が見つかったことである。方針は次のとおりである。上記パラメータ族を考えてやり、もしオリジナルの $(1:\sqrt{3})$ のスミス帽が周期的なタイル張りを許すと仮定する。このときパラメータを連続変形すると $(1:\infty)$ と $(1:0)$ での周期タイル張りに組合せ構造を保ったまま連続的に変形される。相似変換して $(1:\infty) = (0:1)$ と $(1:0)$ の辺の長さは 1 としておく。するとタイルの面積比は $2:3$ となることが分かる。さて $(0:1)$ と $(1:0)$ はどちらも六角格子上に頂点を持つタイル張りである。当然 $(0:1)$ の基本領域を $(1:0)$ の基本領域に映すアフィン写像 f が存在する。この写像 f が相似変換であることが、少し技術的な議論の末に示される（詳細を私はまだ理解できていない）。しかし六角格子では $\sqrt{3/2}$ の相似比をつくる素数 2 が整数係数二次形式 $x^2 + xy + y^2$ で実現できないためこのような相似比を実現することはできないので矛盾となる。

この新しい強非周期タイルの発見はさまざまな教訓をもたらした。数学者と数学愛好家との協力関係。試行錯誤で見つかったタイルの驚異的な性質。そこから生まれた強非周期性証明の新しいアイデア。どれをとっても私には素晴らしいとしか言葉がない。

昨今、AI の発展はすさまじい。パターン認識と模倣は「彼ら」の最高の得意技ともいえるだろう。だが真似ばかりしている人が尊敬されることはない。これまでの考え方を変えさせる根本的な発見にはパターン認識の延長に含ま

れないものがあるはずだ。このタイルの発見にはそのような予定調和を破壊する新規性があり、創造とは何かを私たちに改めて教えてくれているように思う。

7　追加ニュース

同じ４人の著者が、５月日にさらに驚くべき結果 [6] を発表した。図７中央の (1 : 1) タイルは強非周期性を持たない例外集合に属する。つまりこのタイルでは辺比が等しいことを利用すると周期的なタイル張りも作ることができる。しかしタイルに対する可能な操作を平行移動と回転のみにして裏返しを許さないならば、強非周期性を持つのである。この場合の置換規則はかなり複雑なものである。

荒木義明氏、杉本晃久氏に素稿への有用なコメントをいただきました。この場を借りてお礼申し上げます。

参考文献

[1] R. Greenfeld and T. Tao. A counterexample to the periodic tiling conjecture. *arXiv:2211.15847*.

[2] B. Grünbaum and G. C. Shephard. *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman and Company, New York, 1987.

[3] E. Jeandel and M. Rao. An aperiodic set of 11 Wang tiles. *Adv. Comb.*, pp. Paper No. 1, 37, 2021.

[4] M. Senechal. *Quasicrystals and geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[5] D. Smith, J. S. Myers, C. S. Kaplan, and C. Goodman-Strauss. An aperiodic monotile. *arXiv:2303.10798*.

[6] D. Smith, J. S. Myers, C. S. Kaplan, and C. Goodman-Strauss. A chiral aperiodic monotile. *arXiv:2305.17743*.

[7] J. E. S. Socolar and J. M. Taylor. An aperiodic hexagonal tile. *Journal of Combinatorial Theory*, Vol. 18, pp. 2207–2231, 2011.