数論セミナー

日時: 2025 年 7 月 18 日（金）16:40〜

場所: D814 + Teams

講演者: 鶴巻敬史 (筑波大学), 大島哲 (筑波大学)

講演題目: non-lacunary なベキ級数における特殊値の代数的独立性の拡張

Abstract:

P. Erdős (1957) は, Erdős-Straus (1954) の結果を改良して次の定理を得た. 整数 $b \geq 2$ に対し, 正整数の列 $1 \leq w(0) < w(1) < w(2) \cdots$ が $\limsup_{m\to\infty} w(m)/m^{\ell} = \infty$ をみたすとき, $\sum_{m=0}^{\infty} b^{-w(m)}$ は超越数であるか, 次数が $\ell + 1$ 以上の代数的数である. Bugeaud (2007) は次の予想を立てた. すなわち, α $(0 < |\alpha| < 1)$ を代数的数とし, ベキ級数 $f(X) = \sum_{m=0}^{\infty} X^{w(m)}$ において, 数列 $(w(m))_{m=0}^{\infty}$ が "十分に早く増大する" とき, $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{w(m)}$ は超越数である. 関連して, Corvaja-Zannier (2002) は部分空間定理を用いて $(w(m))_{m=0}^{\infty}$ が lacunary であるとき, すなわち $\liminf_{m\to\infty} w(m+1)/w(m) > 1$ をみたすとき, $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{w(m)}$ が超越数であることを証明した. また, Nishioka (1994) は Mahler の手法を用いて, 集合 $\left\{\sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{k^m} \mid k = 2, 3, \cdots\right\}$ が代数的独立であることを示した.

以上のような背景のもと, 我々は lacunary でない級数たちの代数的独立性に注目し, 主結果の帰結として, 例えば次のような 3 つの実数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 の代数的独立性を証明した.

$$\xi_1 = \sum_{m=3}^{\infty} m^3 \beta^{-\lfloor m^{\log\log m} \rfloor}, \quad \xi_2 = \sum_{m=3}^{\infty} \beta^{-\lfloor m^{\log\log m} \rfloor}, \quad \xi_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta^{-\lfloor m^{\log m} \rfloor}.$$

ただし, β は Pisot 数または Salem 数である. これまで ξ_1 と ξ_2 の代数的独立性, および ξ_2 と ξ_3 の代数的独立性は既知であったが, ξ_1, ξ_2, ξ_3 の代数的独立性は未解決であった. 今回の手法として, Erdős-Straus (1954), およびそれを発展させた Kaneko (2012, 2017) を用いた. 従来の手法と比較して, 関数等式を満たすとは限らない関数の特殊値の代数的独立性を証明できるという点で, より柔軟性がある.

本講演は金子元氏 (筑波大学) との共同研究に基づく.

世話人: 秋山茂樹（内: 4395）