Salem 数と一様分布 mod 1*

秋山茂樹（新潟大・理）

2002 年 12 月 2 日

この仕事は、名古屋大学の谷川好男氏との共同研究である。実数列 (u_n) $n = 1, 2, \ldots$ が一様分布 mod 1 するとは、u_n の小数部分が、$[0, 1)$ に一様に分布するという意味である。正確を期すれば、任意の $[0, 1)$ の部分区間 $I = [a, b)$ に対して $A_N(u_n, I)$ を u_n の小数部分 $\{u_n\}$ が区間 I に入る個数とするとき、

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} A_N(u_n, I) = b - a$$

が成立する事となる。区間として $[a, b)$ の代わりに $[a, b], (a, b], (a, b)$ としても同じである。この条件は任意の $[0, 1]$ 区間の連続関数 f に対して

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{u_n\}) = \int_0^1 f(x)dx \tag{1}$$

が成立する事と同値となる。連続関数を Fourier 展開することで任意の自然数 h に対して

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} exp(2\pi hiu_n) = 0$$

が成立することも一様分布と同値であることが示せる。すなわち、複素数値関数の $exp(2\pi hix)$ に対してのみ、(1) を確かめればよいのである。このことを Weyl の規準といい、左辺の $\sum_{n=1}^{N} exp(2\pi hiu_n)$ を Weyl 和という。Weyl 和の非自明な評価を得ることは解析数論の大問題である。技巧的な評価方法が多く知られており、一様分布も様々な数列について確かめられている。大雑把に言えば、多項式オーダーの関数については、かなり多くの結果が知られているといってよい。たとえば α を無理数とし

*研究集会「確率論と計算数学」at 金沢大学サテライトプラザ

たとき α を先頭の係数とする多項式 $P(x)$ で $u_n = P(n)$ とすれば一様分布する。 一方、指数オーダーの増大度をもつ関数についての一様分布を示す問題は非常に難しい。測度論的な結果として Koksma は $\alpha > 1$ のとき殆どすべての α に対して $u_n = \alpha^n$ は一様分布することを示した。ここで殆どすべてというのは $\mathbb{R}^1$ の Legesgue 測度に関して言う。ここまでの一様分布の一般論については [4] に詳しい。整数論の研究者は、具体的な α で (α^n) が一様分布するものを長期にわたって探してきた。たとえば、3/2 とか一般に代数的数、自然対数の底 e や円周率 π の場合で考えるのだが知られている知識は非常に少ない。たとえば [3] を見よ。測度零を除いて成り立つのだから、一つぐらい具体例が合ってもよかろうとという気がするが、この指数オーダー場合の一様分布の問題は具体的に α を固定すると非常に難しい問題と思われる。[1]

一方奇妙なことに、(α^n) が一様分布しない例は、古くから知られている。Pisot 数とは 1 より大の実代数的整数で、他の根は単位円の内部に含まれるものをいう。Salem 数は 1 より大の実代数的整数で、他の根が単位円の内部または周上にあるもので、さらに少なくとも一つの根が単位円周上に存在するものをいう。Salem 数は 4 次以上の偶数次の相反方程式の根となる。相反方程式とは、ξ が根ならば $1/\xi$ も根となるような方程式である。実は、Pisot 数と Salem 数が (α^n) が一様分布しないことで有名な数である。Pisot 数 α については α^n と整数との距離は $n \to \infty$ で 0 に収束する。また α が Salem 数のときは小数部分 $\{\alpha^n\}$ は $[0,1)$ で稠密となるが一様分布ではない。逆に Salem 数は $\{\alpha^n\}$ が $[0,1)$ で稠密となる知られている唯一の具体的な数である。Pisot 数、Salem 数だけを扱った特色ある本として [2] がある。

従って α が Salem 数ならば (α^n) は一様分布しないのだが、この分布は**いったいどれくらい一様分布と離れているのだろうか？**。これが本研究の問題意識である。我々は次のような評価を導くことに成功した。

Theorem 1. *α を次数 8 以上の Salem 数とする。このとき極限値*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} A_N((\alpha^n), I)$$

が存在して

$$\left| \lim_{\to\infty} \frac{1}{N} A_N((\alpha^n), I) - |I| \right| \le 2\zeta \left(\frac{\deg \alpha - 2}{4} \right) c_0^{\frac{\deg \alpha}{2} - 1} |I|, \qquad (2)$$

[1] M.Levin [5] は一様分布する α の構成法を示した。しかし、この α は、いわば一様分布するように逐次近似して構成するので「具体的」といえるかどうか微妙であり、数学者の感性にも依る。

を満たす。ここで $\zeta(s)$ は *Riemann* ゼータ関数、$\deg\alpha$ は α の次数、$|I|$ は区間 I の長さである。また c_0 は次の定数

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{32\pi}) = 0.16\ldots$$

である。

よく知られているように $\zeta(x)$ は 実数 x が大きくなるとき、1 に収束する。したがって、(2) の左辺の $|I|$ の係数は α の次数が大きくなるにつれて急速に小となる。言い換えると、**Salem 数 α の次数が大になると、(α^n) の分布は急速に一様分布に近づく** ことがわかった。

証明には、Kronecker の近似定理、Vaalar, Beuling, Selberg 等による区間の特性関数の一様近似などを用いる。

参考文献

[1] S.Akiyama and Y.Tanigawa, Salem numbers and uniform distribution modulo 1, preprint.

[2] M. J. Bertin, A. Decomp-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse and J.P. Schreiber, *Pisot and Salem numbers*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1992.

[3] F. Beukers, Fractional parts of powers of 3/2, Prog. Math. 22 (1982) 13–18.

[4] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Pure and Applied Math., John Wiley & Sons, 1974.

[5] M. B. Levin, On the complete uniform distribution of the fractional parts of the exponential function. (Russian) Trudy Sem. Petrovsk. No. 7 (1981), 245–256.