四次 Pisot タイルの連結性による分類

秋山 茂樹 (AKIYAMA Shigeki)
新潟大・理 (Faculty of Science, Niigata Univ.)
and
Nertila GJINI
Tirana Univ. (JSPS PD)

1　はじめに

Pisot 双対タイル張りは、数論、記号力学系その他に応用される重要な対象であるが、各タイルの連結性については研究はほとんどなされていない。N.Gjini 氏との共同研究で 3 次の場合が連結であること、4 次の場合は連結の場合と非連結の場合に分かれること、またその区別は、ただ一つの簡単な関係式で記述されることが分かったので報告する。([4])

2　アトラクターの連結性の十分条件

Pisot 双対タイルは、有向グラフ付反復関数系 (Graph directed Iterated Function System, GIFS) のアトラクターとなる。まず通常の反復関数系 (IFS) のアトラクターの連結性についての畑の結果 [8] を復習する。$f_1, f_2, \dots f_k$ $(k \geq 2)$ を $\mathbb{R}^d$ から自分自身への縮小写像系 (IFS) とすると [9] により、空でない唯一の compact 集合 K が存在し $K = \cup_i f_i(K)$ を満たす。 $\{1, 2, \dots k\}$ を頂点とする無向グラフ G を $f_i(K) \cap f_j(K) \neq \emptyset$ のとき辺 (i, j) を書くことで定義する。K が連結であることと G が連結であることは同値である。さらに K が連結ならば、局所連結な連続体ともなり従って弧状連結となる。さらに強く K が局所連結な連続体となることと G が連結なことも同値である。すなわち、アトラクターを扱う限り連結性と弧状連結性は同値である。

次に GIFS の定義を述べる。$V = \{1, \dots, q\}$ を頂点、E を有向辺とする強連結有向グラフ $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E)$ を考える。$E_{i,j}$ を j と i を結ぶ有向辺 $j \to i$ の集合とし、$e \in E$ に対して縮小写像 $F_e : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ が定まっているとしよう。このような $\mathcal{G}$ と 縮小写像の組を GIFS という。IFS と同様に空でない compact 集合 $K_1, \dots, K_q$ が一意的に存在し

$$K_i = \bigcup_{j=1}^{q} \bigcup_{e \in E_{i,j}} F_e(K_j). \tag{1}$$

を満たす ([11, Theorem 1])。この場合にも、畑の結果の類似が成立することは容易に分かる。すなわち $i \in V$ に対して $V_i = \{j \in V \mid \exists e \in E_{i,j}\}$ を頂点の集合とし、$F_{e_1}(K_{j_1}) \cap F_{e_2}(K_{j_2}) \neq \emptyset$ のとき $j_1, j_2 \in V_i$ を無向辺で結んだグラフ G_i を定義するとき、全ての G_i が連結グラフならば全ての K_i は連結（そして弧状連結）である ([10])。

3 Pisot 双対タイルの定義

$\beta > 1$ を固定し $[0,1)$ 上の区分的に線形な変換

$$T_\beta : x \longrightarrow \beta x - [\beta x],$$

のことをベータ変換という。任意の実数 $x = x_1 \in [0,1)$ に対してベータ変換を繰り返すと

$$T_\beta : x_1 \xrightarrow{a_1} x_2 \xrightarrow{a_2} x_3 \xrightarrow{a_3} \dots,$$

を得る。ここで $a_i = [\beta x_i]$。これは $x \in [0,1)$ を

$$x = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \frac{a_3}{\beta^3} \dots = .a_1 a_2 a_3 \dots.$$

の形に強欲算法により書く下すアルゴリズムを与える。当然 a_i は $\mathcal{A} = [0, \beta) \cap \mathbb{Z}$ の元である。一般に正数 $x > 0$ があればある $m > 0$ があって $\beta^{-m} x \in [0,1)$ であるから、 x は

$$x = a_{-m}\beta^m + a_{-m+1}\beta^{m-1} + \dots + a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \dots = a_{-m}a_{-m+1}\dots a_0.a_1a_2a_3\dots,$$

という表示をもつ。これをベータ展開という。これは通常の十進法、二進法などの自然な拡張である。ある番号 N_0 から以降 $a_n = 0$ となるとき x の展開は有限であるといい、

$$x = a_{-m}a_{-m+1}\dots a_0.a_1a_2a_3\dots a_{N_0-1}$$

とも書く。さて 1 は T_β の定義域には入っていないがこれも同様に展開すれば

$$T_\beta : 1 \xrightarrow{c_1} x_2 \xrightarrow{c_2} x_3 \xrightarrow{c_3} \dots.$$

となる。$.c_1c_2c_3\dots$ は 1 の展開と呼ばれ $d_\beta(1)$ と書く。このような展開を考える際、右無限文字列とみたり、数と考えたりと少々乱暴に同一視を行う。さらに

$$d^*_\beta(1) = \begin{cases} d_\beta(1) & d_\beta(1) \text{ が有限でない時} \\ .(c_1 \dots c_{\ell-1}(c_\ell - 1))^\infty & d_\beta(1) = .c_1 \dots c_\ell, \end{cases}$$

と定義する。ここで $.(a_1 \dots a_k)^\infty$ は周期 $a_1 \dots a_k$ の繰り返しの $.a_1 \dots a_k a_1 \dots a_k \dots$ を意味する。$\mathcal{A} = \mathbb{Z} \cap [0, \beta)$ 上の有限語または右無限語 ω が、ベータ展開として実際に現れるか否かはこの $d^*_\beta(1)$ を用いて簡単に判定できる。すなわち、$d^*_\beta(1)$ と ω を比較したとき、どの出発点からみても辞書式順序で ω のほうが小ならばベータ展開として実現されるし、その逆も成り立つ ([13], [7])。この条件が満たされる文字列のことを admissible という。特に $d^*_\beta(1)$ が周期的の場合には、文字列が admissible か否かは有限オートマトンを用いて記述される。すなわち、このような無限文字列の集合は shift 作用素とともに sofic shift をなす。また、$d_\beta(1)$ が有限ならば有限型シフト（Markov type) となる。

さて、$\beta > 1$ が実の代数的整数で、他の共役の絶対値が 1 より小なとき Pisot 数（または Pisot-Vijayaraghavan 数）という。K.Schmidt [16], A.Bertrand [5] は β が Pisot 数のとき $\mathbb{Q}(\beta)$ の正の元は周期的なベータ展開を持つ事をしめした。したがって β が Pisot 数ならば 1 の展開は周期的であるので sofic shift を与える。admissible な右無限語または有限語 ω に対し、S_ω を $a_{-M}a_{-m+1} \dots a_0.$ という小数点より左に繋がった有限語で小数点以下に ω を連結しても admissible なものの全体とする。すなわち

$$S_\omega = \{a_{-M}a_{-m+1} \dots a_0. \mid a_{-M}a_{-m+1} \dots a_0.\text{と小数部分 } \omega \text{ の連結語が admissible}\}$$

この集合を S_ω のことを predecessor 集合という。sofic shift の predecessor 集合は有限個であるし、その逆に predecessor 集合 が有限個であるならば対応する shift は sofic である。Pisot dual tile とは、端的に言えばこの predecessor 集合を幾何学的に実現したものであり、W.P.Thurstion [17] により導入された。なお、文脈は若干異なるものの同様のタイル張りは、substitutative dynamics の立場から G.Rauzy [15] が考察したものを嚆矢としている。この語は左に伸びているので、通常の意味では収束しない。これを強制的に収束させるためにベータの共役を用いる。$\beta = \beta^{(1)}, \dots, \beta^{(r_1)}$ を β の実の共役、$\beta^{(r_1+1)}, \dots \beta^{(r_1+r_2)}$ および $\overline{\beta^{(r_1+1)}}, \dots \overline{\beta^{(r_1+r_2)}}$ を虚の共役とする。β の次数を d とすれば $d = r_1 + 2r_2$ である。$\mathbb{Q}(\beta)$ の元 x を $\mathbb{R}^{d-1}$ に次のように写像 Φ で移す。

$$\Phi(x) = \left(x^{(2)}, \dots, x^{(r_1)}, \Re(x^{(r_1+1)}), \Im(x^{(r_1+1)}), \dots \Re(x^{(r_1+r_2)}), \Im(x^{(r_1+r_2)})\right)$$

このとき、$\omega \in [0,1) \cap \mathbb{Z}[1/\beta]$ をとり、ω をそのベータ展開と同一視する。これは admissible な右無限語または有限語を与える。そこで T_ω を $\Phi(S_\omega + \omega) = \Phi(S_\omega) + \Phi(\omega)$ の $\mathbb{R}^{d-1}$ の自然な位相での閉包とする。T_ω は S_ω の‘双対化’である。β が Pisot 数であることを用いると T_ω はコンパクトである。また $\mathbb{R}^{d-1} = \bigcup_{\omega \in [0,1) \cap \mathbb{Z}[1/\beta]} T_\omega$ を示す事ができる [1]。T_ω は平行移動を除くと有限種類しかなく、さらにそれらは GIFS のアトラクターとなることがわかる。β が単数でない場合には、$\mathbb{R}^{d-1}$ は T_ω でカバーされるがこれは本質的に多重被覆で被覆次数は無限大となる。単数のときには $d-1$ 次元 Legesgue 測度正の重なり、すなわち本質的な重なりはないと期待される。[14] および [1] では、β が Frougny-Solomyak [6] の考察した有限性

条件の下で、この期待される性質をもつタイル張りを実現した。さらに [3] ではすべての Pisot 単数の場合に関して考察したが、一般的には証明できず、ある種の弱い条件付でタイルの重なりがない事を示した。すなわち、β が Pisot 単数の場合ベータ展開が弱有限性という代数的な性質をもつ事とタイルの重なりがないことは同値という結果を導いたのである。弱有限性とは、任意の $\mathbb{Z}[\beta]$ の正の元 x は有限ベータ展開をもつ y, z により $x = y - z$ となり、さらに z はいくらでも小にとれるという事をいう。これは一見すると奇妙な条件であるが今のところ反例はなく、また最近の H.Rao との共同研究で $d \leq 3$ ならば成立することも証明できた。以下では T_ω は Pisot 双対タイルと呼ぶ。

4　主結果

まず今回証明できた事を端的に述べる。β は Pisot 単数とし、d を次数とする。

Theorem 4.1. $d \leq 3$ のときすべての ω に対して T_ω は連結である。

Theorem 4.2. $d = 4$ で β の最小多項式の定数項が 1 ならばすべての ω に対して T_ω は連結である。

Theorem 4.3. $d = 4$ で β の最小多項式が $x^4 - ax^3 - bx^2 - cx - 1$ のときすべての ω に対して T_ω が連結であるための必要十分条件は $a + c - 2[\beta] \neq 1$ である。

結果は明快であるが、その証明は非常に面倒である。どのような手法が用いられるかを以下に紹介する。まず、d 次の Pisot 単数はいかなる最小多項式を持つのかを知らなくてはならない。そのために Sturm の根の分離の古典的結果を複素数版にした Hermite, Schur の結果を用いることにより Pisot 単数の最小多項式であるための十分条件を導こう。

d 次実係数多項式 $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^{d-i}$ に D_d を以下の $2d \times 2d$ 行列の行列式とする。

$$
D_d = \begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccc|c|cccc|c}
a_0 & a_1 & \cdot\ \cdot & \cdot & a_d & & & & \\
 & a_0 & \cdot\ \cdot & \cdot & a_{d-1} & a_d & & & \\
 & & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & & \\
\hline
 & & & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot\ \cdot & & a_d \\
\hline
a_d & a_{d-1} & \cdot\ \cdot & \cdot & a_0 & & & & \\
 & a_d & \cdot\ \cdot & \cdot & a_1 & a_0 & & & \\
 & & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & & \cdot \\
\hline
 & & & a_d & a_{d-1} & \cdot & \cdot\ \cdot & & a_0
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \rightarrow d \\ \\ \\ \\ \rightarrow 2d
\end{array}
\\
\begin{array}{ccc}
\downarrow & \qquad\qquad\qquad & \downarrow \\
d & & 2d
\end{array}
\end{array}
$$

つぎに d 行と $2d$ 行および d 列と $2d$ 列を取り除いてできる $2(d-1)\times 2(d-1)$ 行列の行列式を D_{d-1} とする。以下同様に続けて

$$D_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} a_0 & a_1 & a_d & \\ & a_0 & a_{d-1} & a_d \\ \hline a_d & a_{d-1} & a_0 & \\ & a_d & a_1 & a_0 \end{array}\right], \qquad D_1 = \begin{bmatrix} a_0 & a_d \\ a_d & a_0 \end{bmatrix}$$

までを定める。

Proposition 4.1. $d \geq 3$ とし、$\beta > 1$ は *monic* な多項式 $P(x)$ の根とし $P(0) = \pm 1$ とする。このとき

$$P(1) < 0 \qquad \text{で} \qquad D_i < 0 \qquad 2 \leq i \leq n. \tag{2}$$

ならば β は *Pisot* 単数である。

さらに $d \leq 4$ ならば逆も成立する。すなわち β が Pisot 単数ならば (2) が成り立つ。一般の次数でも逆は成立すると思われるがこれは証明できていない。なお逆が成り立たない事があるとすれば、問題となるのは、ある i について D_i が 0 になる場合のみである。

次の仕事は、$d_\beta(1)$ の分類である。係数の大小を適切な不等式関係で分類し、それぞれに 1 を表す admissible な列を具体的に構成する作業である。これは特に 4 次では場合分けが多量で大変に根気の要る作業であるが、[13], [7] を用い辞書式順序での文字列の比較をしっかり行って計算結果を詳しくチェックする。この時点で、4 次の Pisot 単数の全体を考えると $d_\beta(1)$ の前周期の長さも、周期の長さにも上界がないことがわかる ([12]) 。

最後の仕事は、§2 の畑のタイプの結果を用いて、隣り合う Pisot dual tile に共有点を見つける作業である。$d_\beta(1)$ が有限で 1 で終了する場合には、[1] でも簡潔に述べたようにこの作業は可能である。しかし、一般には $d_\beta(1)$ は有限ではなく、その場合の作業はすべて手作業で、その分類は大変である。このような苦労の末に上述した最初の二つの定理の証明ができる。

実は私は Nertila さんにこの問題を考えてみないかと共同研究を提案した当初は、この計算はあまりに面倒なので、実行可能かどうか少々懐疑的な気持ちであった。この仕事の大半は Nertila さんの類まれなる粘り強さの産物であることを強調したい。

三番目の定理は、非連結の場合を含んでいる。じつは、一昨年の暮れ近くに Nertila さんは、ほとんどの場合の連結性を証明した後に、次の場合がどうしても連結できないとぼやいた。それは

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 6x - 1$$

という多項式の場合である。（ $a=3$, $c=6$, $[\beta]=4$ なので $a+c-2[\beta]=1$ である。）この場合 $d_\beta(1)=.43(2302041202)^\infty$ という展開となる。私はすべての Pisot 双対タイルは連結になると信じていたので、これを聞いて連結性の証明を試みた。確かに、やってみるとできそうでできない。この場合には、なんらかの特殊事情があるように感じられた。

長時間の無駄な努力の末、頭を切り替え、もしかして連結でないことが証明できないか思ったところ、数時間でそんなに難しくなく証明できてしまった。これには随分驚いたものである。そして、一つ非連結なものが見つかると、今まで連結性が証明できなかった 4 つのクラスはすべて非連結なタイルが存在することもわかったのである。

この非連結性は証明をせよといわれればさほどの困難なくできるものだろうが、このような特殊事情をもつ多項式を見つけるの事が大変難しい。全部を分類しようとしたからこそ見つかったものと思う。非連結であることの証明もなかなか面白いのだが、少々技巧的になりすぎるので省略する。[4] に詳しい証明があるので。ご興味をお持ちの方は ps ファイルを差し上げます。ご連絡ください。

参考文献

[1] S. Akiyama, *Self affine tiling and Pisot numeration system*, Number Theory and its Applications, ed. by K. Győry and S. Kanemitsu, 7–17 Kluwer 1999.

[2] S. Akiyama, *Cubic Pisot Units with finite beta expansions*, Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis, ed. by F. Halter-Koch and R.F. Tichy, de Gruyter (2000), 11–26.

[3] S. Akiyama, *On the boundary of self affine tilings generated by Pisot numbers*, Journal of Math. Soc. Japan, vol. 54, no. 2 (2002), 283–308.

[4] S. Akiyama and N. Gjini, *Connectedness of number theoretic tilings*, submitted.

[5] A. Bertrand, *Développements en base de Pisot et répartition modulo* 1. C. R. Acad. Sci. Paris, **285** (1977), 419–421.

[6] C. Frougny and B. Solomyak, *Finite beta-expansions*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **12** (1992), 713–723.

[7] Sh. Ito and Y. Takahashi, Markov subshifts and realization of β-expansions, J. Math. Soc. Japan 26 (1974) no. 1, 33–55

[8] M. Hata, *On the Structure of Self-Similar Sets*, Japan J. Appl. Math. **2** (1985), 381–414.

[9] J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 713–747.

[10] J. Luo, S. Akiyama and J. Thuswaldner, *On boundary connectedness of connected tiles*, to appear in Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophical Society.

[11] R. D. Mauldin and S. C. Williams, *Hausdorff dimension in graph directed constructions*, Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1988), 811–829.

[12] N. Gjini, *$\beta-$expansion of* 1 *for quartic Pisot units*, submitted.

[13] W. Parry, *On the $\beta-$expansions of real numbers*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **11** (1960), 401–416.

[14] B. Praggastis, *Markov partition for hyperbolic toral automorphism*, Ph. D. Thesis, Univ. of Washington, 1992.

[15] G. Rauzy, *Nombres Algébriques et substitutions*, Bull. Soc. France **110** (1982),147–178.

[16] K. Schmidt, *On periodic expansions of Pisot numbers and Salem numbers*, Bull. London Math. Soc., **12** (1980), 269–278.

[17] W. P. Thurston, *Groups, Tilings and Finite state automata*, AMS Colloquium lectures, 1989.

秋山茂樹
Shigeki AKIYAMA

新潟大学理学部数学教室
新潟市五十嵐 2 の町 8050
e-mail: akiyama@math.sc.niigata-u.ac.jp

Nertila GJINI

Department of Mathematics, Faculty of Science
Tirana University, TIRANA, ALBANIA
e-mail: nertila@yahoo.com