

# 記号力学系と数系タイル張り

秋山茂樹

## 概要

数系とそれに付随するタイル張りは、記号力学系、ディオファントス近似、数論、オートマトン、準結晶、フラクタル解析などと密接に関連して近年発展している。その一部である Pisot 数系とそれに付随するタイル張りを中心に諸結果を解説する。

## 1 スツルム列と記号力学系

非周期的な対象は数学的扱いが難しく統一的理論が出来ないことが多い。例外的にスツルム列には一次元無理回転と結びつける理論が構築されている。数系タイル張りはスツルム列の高次元への一つの拡張と考えられる。そこで、動機の一つであるスツルム列の周辺を最初に解説する。

$A$  を有限集合とし、 $A^{\mathbb{N}}$  で  $A$  の片側無限列の集合を表す。その各元  $\xi$  は  $a_i \in A$  を用いて  $\xi = a_1 a_2 \dots$  という表示をもつ。 $\xi$  の複雑度  $P_\xi(n)$  を  $\xi$  内の長さ  $n$  の部分語の個数と定義する。乱数列  $\xi = a_1 a_2 \dots$  に対して  $P_\xi(n) = |A|^n$  である。自然数  $n_0, m$  があって  $n \geq n_0$  のとき  $a_{n+m} = a_n$  が成り立つ時  $\xi = a_1 a_2 \dots$  は周期的であるといい、 $n_0 = 1$  と取れるならば  $\xi$  は純周期的であるという。 $m$  を周期の長さという。 $m$  が周期ならばその倍数も周期である。最小の長さの周期を最小周期といい  $\ell(\xi)$  とかく。周期的な  $\xi$  に対して  $P_\xi(n) \leq n_0 + \ell(\xi)$  であるから複雑度  $P_\xi(n)$  は有界となる。他方  $\xi$  が非周期的ならば  $P_\xi(n) \geq n + 1$  が全ての  $n$  で成り立つ。<sup>1</sup> さらに片側無限語  $\xi$  が全ての  $n$  に対して  $P_\xi(n) = n + 1$  を満たす  $\xi$  が存在することが知られている。このような  $\xi$  をスツルム列という。スツルム列は  $P_\xi(1) = 2$  だから  $|A| = 2$  としてよいので以下  $A = \{0, 1\}$  を用いる。

$A^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  の元の有限部分語  $\omega$  に対して  $|\omega|$  を  $\omega$  の長さ、 $|\omega|_0$  を文字 0 の出現回数とする。このとき  $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  の任意の同じ長さの部分語

<sup>1</sup>異なる興味深い複雑度の定義が [64], [50], [51] で提案されている。

$\omega, \omega'$  に対し,  $|\omega|_0$  と  $|\omega'|_0$  の差が  $-1, 0, 1$  のどれかである時  $\xi$  をバランス列という. 周期列は必ずしもバランス列ではない.

正の実数  $x$  に対しその整数部分を  $[x]$  とする. 無理数  $\alpha \in (0, 1)$  と  $\beta \in [0, 1)$  をとり数列  $u_n = [(n+1)\alpha + \beta] - [n\alpha + \beta]$  と定める.  $u_1 u_2 \dots$  は  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  の元である.  $I_0 = [0, 1 - \alpha)$ ,  $I_1 = [1 - \alpha, 1)$  とおく. 周囲長 1 の円周上を秒速  $\alpha$  で始点  $\beta$  から一定速度で回転する点を考えてときその点の  $n$  秒後の位置が  $I_i$  に属するならば記号  $i$  を対応させることにより同じ列  $u_1 u_2 \dots$  が得られる. 従って  $u_1 u_2 \dots$  を回転列という.<sup>2</sup>

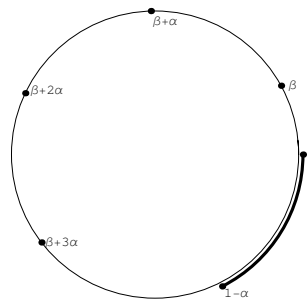


図 1: 回転列

このとき, 次が成立する.

**定理 1 (Morse-Hedlund [62], Coven-Hedlund [30]).** スツルム列, 非周期的なバランス列, 回転列の 3 つは全て同等な概念である.

これは組み合わせ論的性質で無理回転の特性列を特徴づけた簡明で美しい結果である (c.f. [63], [31], また [58] に小史あり).

スツルム列はバランス列であるから 11 と 00 を同時に含むことはできない. 11 を含まないスツルム列を 0 型, 00 を含まないスツルム列を 1 型と呼ぶ. 0 型の場合 1 の隣は自動的に 0 と決まる. 従ってこの場合スツルム列はたとえば 01 を  $a$  に 0 を  $b$  に置換すれば別の  $\{a, b\}$  からなる文字列を生成する (1 型の場合も同様). するとこの方法で作られる  $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$  もまたスツルム列となる. この操作は  $a$  を 1,  $b$  を 0 と書き直せば何度でも反復できる. このとき 0 型が生じるか 1 型が生じるかを記録する. この型の  $\{0, 1\}$  列に単純連分数のアルゴリズムを対応させる<sup>3</sup> ことで, スツ

<sup>2</sup>厳密には, 端点の包含関係を逆にした  $(0, 1 - \alpha]$  と  $(1 - \alpha, 1)$  による分割に関する回転列も考える必要がある.

<sup>3</sup>スツルム列に連分数を対応させるのは自然な発想で, 古くからいろいろな方法が考えられている (c.f. [60], [36], [28])

ルム列から回転数  $\alpha$  と始点  $\beta$  を復元することが出来る (c.f. [15]). ただしこの議論を細かい場合分けなしで例外なく通用させるためにはスツルム列を両側無限列に拡張しておく必要がある.

$\{0, 1\}$  上の有限語の全体  $\{0, 1\}^*$  は語の連結で二項演算を定義することでモノイドとなる (単位元は空語  $\lambda$ ). モノイドの準同型  $f$  は  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  の元  $u_1 u_2 \dots$  に  $f(u_1) f(u_2) \dots$  で自然に作用する.  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  の 2 元  $\xi \neq \xi'$  ( $\xi = \xi_1 \xi_2 \dots$ ,  $\xi' = \xi'_1 \xi'_2 \dots$ ) の最初の異なる index を  $i$  とし距離を  $d(\xi, \xi') = 2^{-i}$  で決めれば  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  は完備であり,  $f(0) = 0\omega$  で  $\omega$  が空語でなければ  $f$  には  $0$  から始まる固定点が決まる. 例えば  $f(0) = 01$ ,  $f(1) = 0$  で準同型を定めるとき,  $f(0) = 01$ ,  $f^2(0) = 010$ ,  $f^3(0) = 01001$  と繰り返すと

$$\lim f^n(0) = 010010100100101001010 \dots$$

に (適当な位相で) 収束し Fibonacci 列と呼ばれる固定点になる. 実はこの固定点はスツルム列となる. このように Substitution で記述できるスツルム列は回転数  $\alpha$  が二次無理数で  $\beta$  が特別な形の場合にかぎる. 一つ Substitution の固定点と書けるかは上に述べた連分数展開との対応をより精密に記述することで可能となる. ([32], [19], [54], [49], [80], [66], なお [20], [15] に優れた解説がある.)

$\mathcal{A}$  上の両側無限語の全体  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  を考える. 各点  $x$  は  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} = \dots x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 \dots$  と表せる. 二元  $x \neq y$  について  $x_i \neq y_i$  となる  $i$  で絶対値最小のものをとり  $d(x, y) = 2^{-|i|}$  により距離をいれると, 片側無限語全体同様に完備になる. スツルム列と連分数を連結する際にも片側無限語でなく両側無限語に拡張する事が本質的に重要であった.  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  の元  $x = (x_i)$  に対してシフト作用素  $\sigma$  を  $\sigma((x_i)) = (x_{i+1})$  と定義すると連続であり  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$  は位相力学系を定義する. これを全シフトという. その  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  の閉集合  $X$  が  $\sigma(X) = X$  を満たすとき  $(X, \sigma)$  もまた力学系であり, これをサブシフトという. 同様に, 片側無限語の全体にもシフト作用素を  $\sigma(x_1 x_2 \dots) = x_2 x_3 \dots$  とすれば位相力学系を定義する. このように記号とシフト作用素による力学系を記号力学系と呼ぶ. 有限語の集合  $\mathcal{F}$  を与え,  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  (または  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ) の元  $\xi$  でそのいかなる有限部分語も  $\mathcal{F}$  に属さないようなものの全体を  $X_{\mathcal{F}}$  とするとサブシフトになる.  $\mathcal{F}$  の元のことを禁止語という. 任意の記号力学系は禁止語集合  $\mathcal{F}$  を与えることで  $X_{\mathcal{F}}$  の形で与えることができる.  $\mathcal{F}$  として有限集合を取ることが出来る場合, そのサブシフトは有限型であるという. また,  $X_{\mathcal{F}}$  の元に現れる有限部分語の

全体  $X_{\mathcal{F}}^*$  が正規言語であるとき<sup>4</sup>, すなわち  $X_{\mathcal{F}}^*$  を認識する有限オートマトンが存在する場合に, そのサブシフトは sofic であるという. 有限型ならば sofic であり, これらの性質は位相共役に関して不変である. sofic サブシフトは有限型サブシフトの factor となる記号力学系として特徴付けられる ([57]).

一次元トーラス  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  と無理回転  $g : x \rightarrow x + \alpha$  による位相力学系  $(\mathbb{T}, g)$  を考える. トーラスを  $I_0, I_1$  に分割し, 軌道  $x, g(x), g^2(x), \dots$  に対して現在そのどちらかにいるかを対応させることで  $\{0, 1\}$  上の無限列を作ったものが回転列である. この分割により  $(\mathbb{T}, g)$  は  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  のサブシフトの factor となる. 与えられたスツルム列の  $0, 1$  パターンを組み合わせて論理的に観察することで連分数が対応し  $x$  の位置や, さらに回転数まで回復できる. この事により過去の状態, すなわち両側無限列としての実態, まだが復元されるのである.

この理論を原始型として様々な方向に拡張の試みがなされてきた. 数系タイル張りもそのようなものの一つと捕らえることができる.

## 2 ベータ展開と Pisot 数系

$\beta > 1$  を固定する.  $[0, 1)$  上の区分的線形変換

$$T_{\beta} : x \longrightarrow \beta x - \lfloor \beta x \rfloor,$$

をベータ変換という. 加法の代わりに乗法を用いた回転のようなものだが §1 の無理回転と異なり,  $T_{\beta}$  は  $\mathbb{T}$  の可逆な変換ではないことに注意する. 任意の実数  $x = x_1 \in [0, 1)$  に対してベータ変換を繰り返して

$$T_{\beta} : x_1 \xrightarrow{a_1} x_2 \xrightarrow{a_2} x_3 \xrightarrow{a_3} \dots,$$

を得る. 矢印の上のラベルは  $a_i = \lfloor \beta x_i \rfloor$  で定める.  $[0, 1)$  を半開区間に分割して  $i = 0, 1, \dots, \lfloor \beta \rfloor - 1$  に対し  $I_i = [i/\beta, (i+1)/\beta)$  とし,  $I_{\lfloor \beta \rfloor} = [\lfloor \beta \rfloor/\beta, 1)$  とおけば,  $a_i$  は  $x_i$  がどの分割に属しているかを記録していることになる.  $T_{\beta}$  は Rényi [69] により導入され混合性, 従ってエルゴード性が証明されている. このアルゴリズムにより  $x \in [0, 1)$  を

$$x = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \frac{a_3}{\beta^3} \cdots = .a_1 a_2 a_3 \dots$$

---

<sup>4</sup> $\mathcal{F}$  が正規言語であることと同値

の形に書く下すことができる.  $a_i$  は当然  $\mathcal{A} = [0, \beta) \cap \mathbb{Z}$  の元である. 一般に正数  $x > 0$  があればある  $m > 0$  があって  $\beta^{-m}x \in [0, 1)$  であるから,  $x$  は

$$x = a_{-m}\beta^m + a_{-m+1}\beta^{m-1} + \cdots + a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \cdots = a_{-m}a_{-m+1} \dots a_0.a_1a_2a_3 \dots,$$

という表示をもつ. これをベータ展開という. これは通常の十進法, 二進法などの自然な拡張である. ある  $l$  があって  $n \geq l$  ならば  $a_n = 0$  となるとき  $x$  の展開は有限であるといい,

$$x = a_{-m}a_{-m+1} \dots a_0.a_1a_2a_3 \dots a_{l-1}$$

とも書く. さて 1 は  $T_\beta$  の定義域には入っていないがこれも強制的に展開すれば

$$T_\beta : 1 \xrightarrow{c_1} x_2 \xrightarrow{c_2} x_3 \xrightarrow{c_3} \dots$$

となる.  $c_1c_2c_3 \dots$  は 1 の展開と呼ばれる. 以降  $d_\beta(1)$  と書く. このような展開を考える際,  $d_\beta(1)$  を右無限文字列とみたり数と考えたり必要に応じて同一視を行う. さらに

$$d_\beta^*(1) = \begin{cases} d_\beta(1) & d_\beta(1) \text{ が有限でない時} \\ (c_1 \dots c_{\ell-1}(c_\ell - 1))^\infty & d_\beta(1) = c_1 \dots c_\ell, \end{cases}$$

と定義する. ここで空でない有限語  $u$  に対し  $u^\infty$  は周期語  $uu \dots$  を意味する.  $d_\beta^*(1)$  は  $1 - \varepsilon$  をベータ展開したものの  $\varepsilon \downarrow 0$  の時の極限 ( $\mathcal{A}^\mathbb{N}$  の位相による) である.  $\mathcal{A} = \mathbb{Z} \cap [0, \beta)$  上の有限語または右無限語  $\omega$  がベータ展開として実際に現れるか否かは  $d_\beta^*(1)$  により判定される. すなわち  $d_\beta^*(1)$  と  $\omega$  を比較したとき,  $\omega$  のどの出発点からみても辞書式順序で  $\omega$  のほうが小ならばベータ展開として実現され, その逆も成り立つ (Parry [65], 伊藤-高橋 [48]). この条件が満たされる文字列を admissible であるという.

任意の有限部分語が admissible な両側無限列の全体のなすサブシフトを  $\beta$  に付随するベータシフトという. 特に  $d_\beta^*(1)$  が周期的の場合には, 文字列が admissible か否かは有限オートマトンを用いて記述され, 逆もなりたつ. 従ってこの場合ベータシフトは sofic である. sofic なベータシフトを生成する  $\beta$  を Parry 数<sup>5</sup> という. また,  $d_\beta(1)$  が有限となる事とベータ

<sup>5</sup>[65] ではベータ数と呼ばれている.  $\beta$  がベータ数では何を言っているのか分からないのでこう呼ぶべきだと Frougny が提唱しているので採用した.

シフトが有限型になることは同値である. この場合  $\beta$  を単純 Parry 数という ([65], [24]).  $\beta > 1$  が実の代数的整数で, 他の共役の絶対値が 1 より小なとき Pisot 数 (または Pisot-Vijayaraghavan 数) という. また  $\beta > 1$  が実の代数的整数で他の共役の絶対値が 1 以下であって少なくとも一つの共役の絶対値が 1 のものを Salem 数と言う.  $\mathbb{R}_+$  で非負実数を表す. Schmidt [72], Bertrand [23] は  $\beta$  が Pisot 数のとき  $\mathbb{Q}(\beta) \cap \mathbb{R}_+$  の元は周期的なベータ展開を持つ事をしめした. したがって  $\beta$  が Pisot 数ならば 1 の展開は周期的であるので sofic シフトを与える. さらに [72] は  $[0, 1)$  内の全ての有理数のベータ展開が周期的になるような  $\beta$  は Pisot 数または Salem 数である事を示した. しかし, Salem 数の場合に  $\mathbb{Q}(\beta) \cap \mathbb{R}_+$  の全ての元の  $\beta$  展開が周期的になるかどうかは知られていない (Boyd [25], [26], [27]). これらの関係を図 2 に表した. 但し, 有限性については §5 で説明する.

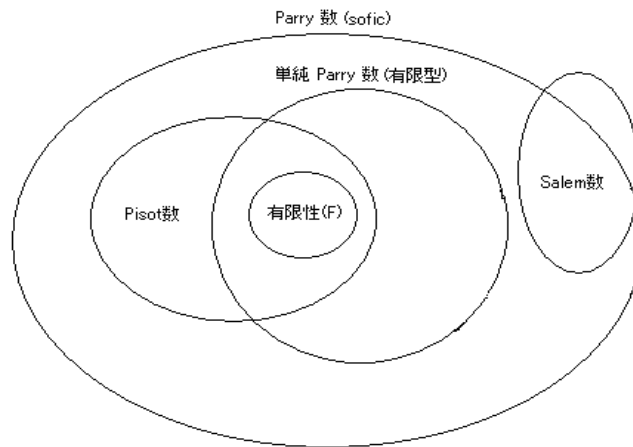


図 2: Parry 数の分類

Parry 数  $\beta$  は 1 より大の実代数的整数であって, 他の共役の絶対値は  $\beta$  および黄金比  $(1 + \sqrt{5})/2$  より小である ([65], Solomyak [76]) これは十分条件ではない. Parry 数の代数的整数の集合の中での特徴づけもまた難しい問題である. ([35], [18])

$\beta$  を Pisot 数としたときのベータ展開による数の表現の方法を Pisot 数系という. [72], [23] の結果は Pisot 数系が十進法などの通常の数系と類似していることを意味している.

### 3 Pisot 数系の双対タイル張り

有限集合  $\mathcal{A} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$  上のサブシフトの元  $\xi = (\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}} = \dots \xi_{-2} \xi_{-1} \xi_0 \cdot \xi_1 \xi_2 \dots$  に対して左無限語  $\dots \xi_{-2} \xi_{-1} \xi_0$  を整数部分, 右無限語  $\xi_1 \xi_2 \dots$  を小数部分と呼ぶ. 必要に応じ整数部分であることを右側に小数点をつけることで表し, また左に小数点をつけることで小数部分であることを表す.  $i$  が大きい時  $\xi_{-i} = 0$  ならば整数部分は有限語で自然に書け,  $i$  が大きい時  $\xi_i = 0$  ならば小数部分を有限語で書ける. admissible な右無限語または有限語  $\omega = \omega_1 \omega_2 \dots$  に対し,  $S_\omega$  を  $a_{-m} a_{-m+1} \dots a_0 \cdot$  という小数点より左に繋がった有限語で小数点以下に  $\omega$  を連結しても admissible になるようなものの全体とする. すなわち

$$S_\omega = \{a_{-m} a_{-m+1} \dots a_0 \cdot \mid a_{-M} a_{-m+1} \dots a_0 \cdot \omega_1 \omega_2 \dots \text{ が admissible}\}$$

この集合  $S_\omega$  のことを  $\omega$  の predecessor 集合という. sofic シフトの相異なる predecessor 集合の個数は有限であり, その逆に predecessor 集合が有限個であるならば対応するサブシフトは sofic である. ベータ展開を考える際は小数部分の全体は自然に  $[0, 1)$  に全単射で対応し, 右無限語の位相と実数の位相が対応しているが整数部分は実数の位相では有界でないし左無限語の位相と対応しない. Thurston は Pisot 数系の場合に整数部分をユークリッド空間のコンパクト集合に埋め込むことを考えた ([78]). ここでは [3], [6] による formulation で述べる.  $\beta$  を  $d$  次の Pisot 数とし  $\beta^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, r_1$ ) を実,  $\beta^{(i)}, \overline{\beta^{(i)}}$  ( $i = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2$ ) を虚の共役とする. ここで  $\beta^{(1)} = \beta$  とする. 当然  $d = r_1 + 2r_2$  である.  $\Phi: \mathbb{Q}(\beta) \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$  を次で定義する.

$$\Phi(x) = (x^{(2)}, \dots, x^{(r_1)}, \Re x^{(r_1+1)}, \Im x^{(r_1+1)}, \dots, \Re x^{(r_1+r_2)}, \Im x^{(r_1+r_2)})$$

このとき  $\Phi(\mathbb{Z}[\beta] \cap \mathbb{R}_+)$  は  $\mathbb{R}^{d-1}$  で稠密である ([3]). このとき  $\beta$  が Pisot 数なので  $\Phi(S_\omega)$  は有界となる.  $\mathcal{T}_\omega$  を  $\mathbb{R}^{d-1}$  の位相に関する  $\Phi(S_\omega + \omega)$  の閉包とする. 容易に

$$\mathcal{T}_\omega = \left\{ \Phi(\omega) + \sum_{i=0}^{\infty} a_{-i} \Phi(\beta^i) \mid a_{-m} a_{-m+1} \dots a_0 \cdot \omega_1 \omega_2 \dots \text{ は admissible} \right\}$$

とも書けることが分かる. Pisot 数が代数的整数の環の中で単数であるとき Pisot 単数という.  $\omega$  が  $\mathbb{Z}[\beta] \cap [0, 1)$  のベータ展開 (すなわち  $\mathbb{Z}[\beta] \cap \mathbb{R}_+$  の小数部分の全体) を走る時  $\mathbb{R}^{d-1} = \overline{\bigcup_\omega \Phi(S_\omega + \omega)}$ , だが  $\beta$  が Pisot 単

数であるとき  $\overline{\Phi(S_\omega + \omega)}$  の全体は局所有限な  $\mathbb{R}^{d-1}$  の被覆をなすので  $\mathbb{R}^{d-1} = \bigcup_\omega \mathcal{T}_\omega$  を得る ([6]). これを  $\mathcal{T}_\omega$  による  $\mathbb{R}^{d-1}$  の被覆ができた. この被覆が (境界での重複度を除いて) 何重被覆になっているかが問題である. もし一重被覆ならば, sofic シフトの predecessor 集合の有限性は幾何学的に表示され, 有限の種類 of タイルによる  $\mathbb{R}^{d-1}$  のタイル張りを生じ, さらに同じ形のタイルは平行移動で重なることになる. さらにこのタイル張りは自己相似性をもつ. なぜなら  $a \oplus b$  で文字列  $a, b$  の連結を表すと

$$\beta^{-1}S_\omega = \bigcup_{a \oplus \omega : \text{admissible}} \left( \frac{a}{\beta} + S_{a \oplus \omega} \right)$$

となる. ここで右辺の和は  $a \oplus \omega$  が admissible となる  $a \in \mathcal{A}$  をわたる.  $\mathbb{Q}(\beta)$  上の写像  $z \rightarrow \beta^m z$  は  $\mathbb{R}^{d-1}$  の affine 写像  $G_m$  に次の可換図式で自然に翻訳される.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}(\beta) & \xrightarrow{\times \beta^m} & \mathbb{Q}(\beta) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \mathbb{R}^{d-1} & \xrightarrow{G_m} & \mathbb{R}^{d-1} \end{array}$$

$m$  が正ならば  $G_m$  は縮小写像, 負ならば拡大写像である.  $G_{-1}$  により一つのタイル  $\mathcal{T}_\omega$  は拡大し

$$G_{-1}(\mathcal{T}_\omega) = \bigcup_{a \oplus \omega} \mathcal{T}_{a \oplus \omega}$$

と分割されることになる. これを sofic シフトは自己相似性をもつタイル張りとして幾何学的に実現されたのである. このような状況を Thurston は望ましい状況と考えた. 記号が異なるが [78] に次のようにある.

‘It does not quite follow that the  $K_x$  determines a tiling of  $S$ , for they could in principle have substantial overlap. (中略) However, in many cases of this construction, the shingling are tilings, and the tiles are disks’.

Thurston は, 多くの場合にタイル張りとなり  $\mathcal{T}_\omega$  は  $d-1$  次元球と同相だろうと考えていたのである. 前者は, 現在肯定的に予想されているが, 後者には多くの反例がある. この問題に関しては, §5 以降に論ずる.



## 4 低次の Pisot 単数の場合

二次および三次の具体例で双対タイル張りが何を意味するかを詳述する。二次の場合でも自明ではなくスツルム列や substitution などの概念が自然に生じる。  $\eta = (1 + \sqrt{5})/2$  とし,  $\theta$  を  $x^3 - x - 1$  の正根としよう。どちらも Pisot 単数であり,  $d_\eta(1) = 11$ ,  $d_\theta(1) = 10001$  となるのでどちらも単純 Parry 数である。  $X_\eta$  は  $\{0, 1\}$  を用いた両側無限語で 11 を禁止したものであり, 黄金比シフトとか Fibonacci シフトと呼ばれている。また  $X_\theta$  はやはり  $\{0, 1\}$  を用いた両側無限語で 11, 101, 1001, 10001 を禁止したものである。  $\eta' = (1 - \sqrt{5})/2$ ,  $\theta' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  を  $\theta$  の共役根の一つとする。理解を助けるため最初に小数部分の直接の埋め込みによるタイル張りを論ずる。基本的タイル

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i \eta^{-i} \mid a_i \in \{0, 1\}, a_i a_{i+1} = 0 \right\}$$

から出発する。記号的には  $A = \{.a_1 a_2 \dots\}$  とかける。これは  $X_\eta$  の小数部分を収束するべき級数で実現したもので, ベータ展開を考えれば  $[0, 1] = A$  が分かる。ベータ展開では .0101... は admissible ではないが, 対応するベータシフトではこのような右無限列を suffix にもつようなものも許されるので  $A$  には右端も含まれる。さてこの  $A$  を  $\eta$  倍することは, 小数部にシフトとして作用する。左端の文字が 0 か 1 かで次のような集合方程式を得る。

$$\eta A = A \cup (1 + B), \quad \eta B = A$$

ここで  $B = \{x \in A \mid a_1 = 0\}$  である。  $B$  に制限が加わる理由は, 左端に 1 が生じたのでその次の文字は 0 でなくてはならないからである。従って  $B = [0, 1/\eta]$  となり, タイル  $A = [0, 1]$  と  $1 + B = [1, 1 + 1/\eta]$  は接している。平行移動の記述をやめることで状況はより明白になる。タイル  $A$  は  $\eta$  倍すると右に成長し  $AB$  という異なる長さのタイルの連結に成長する。  $B$  は  $\eta$  倍すると  $A$  に成長する。すなわち状況は Fibonacci substitution  $A \rightarrow AB, B \rightarrow A$  で完全に記述され  $\mathbb{R}_+$  は  $ABAABABAABAAB\dots$  という Fibonacci 列のあらかず二種のタイルにより非周期的にタイル張りされる。一般に  $\beta$  が Parry 数の場合, 対応するサブシフトが sofic であるためベータ展開から有限種類のタイルによる  $\mathbb{R}_+$  のタイル張りが生じる。これはよく知られた構成法である。以下これを直接タイル張りと呼ぶ。

一方で双対タイル張りは整数部分の方で実現する。基本的な双対タイ

ルは

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_\lambda = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} x_{-i} \eta^i \mid x_{-i} \in \{0, 1\}, \quad x_{-i} x_{-i-1} = 0 \right\}$$

である. これはベータ展開を逆の方向に伸ばしたもので記号的には

$$\{\dots x_{-3} x_{-2} x_{-1} x_0.\}$$

である. ただし, 通常の意味では収束しないので  $\eta$  の代わりにその共役  $\eta'$  を用いて収束させている.  $\mathcal{T}$  の幾何学的形状が問題になるが, この場合は容易で  $\mathcal{T}$  は区間  $[-1, \eta]$  となる. 今度は右シフトを施してみると

$$(\eta')^{-1} \mathcal{T} = \mathcal{T} \cup \mathcal{T}_1$$

を得る. ここで  $\mathcal{T}_1$  は記号的には  $\{\dots x_{-3} x_{-2} x_{-1}.1\}$  と書ける. すなわち小数部分が .1 となるものの集合である. しかし, 11 は禁止であるから  $x_{-1}$  は 0 になる. すなわち

$$(\eta')^{-1} \mathcal{T} = \mathcal{T} \cup (\eta' \mathcal{T} + \eta'^{-1})$$

が成り立つ.  $U = \eta' \mathcal{T} = [-1, 1/\eta]$  と置こう.  $\eta'^{-1} = -\eta$  だから

$$\eta' \mathcal{T} + \eta'^{-1} = [-1 - \eta, 1/\eta - \eta] = [-\eta^2, -1]$$

なので幾何学的に表現すると区間  $\mathcal{T}$  を右シフトすることで左に区間  $U$  が連結される. この状況は  $\sigma$  を  $\{\mathcal{T}, U\}$  からなる語のモノイドの反準同型 (すなわち  $\sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x)$  を満たす写像) で

$$\sigma(\mathcal{T}) = U\mathcal{T}, \quad \sigma(U) = \mathcal{T}$$

を満たすものを作れば理解できる. すなわち  $\sigma$  を繰り返すと

$$\begin{array}{ll} U & \mathcal{T} \\ U & \mathcal{T}\mathcal{T} \\ UTU & \mathcal{T}\mathcal{T} \\ UTU & \mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T} \\ UTUT\mathcal{T}UTU & \mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T} \\ UTUT\mathcal{T}UTU & \mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}UTUT\mathcal{T}\mathcal{T} \\ UTUT\mathcal{T}UTUT\mathcal{T}UTUT\mathcal{T}UTU & \mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}UTUT\mathcal{T}\mathcal{T} \end{array}$$

のようにタイル  $T$  が左右に成長していくのである. この列は両側スツルム列を生成し様々な性質を満たす. もっとも印象的なものを挙げよう.  $xy$  格子に直線  $y = x/\eta$  を書いたとき  $y$  軸との交点に文字  $T$ ,  $x$  軸との交点に  $U$  を与え, 原点では僅かに上を通過するとして  $UT$  と置けばこの列が得られる (図 3). これもスツルム列の一般的性質の一つであり, このためスツルム列はカット列とも呼ばれる (c.f. [32], 高次元版は田村 [77] をみよ).

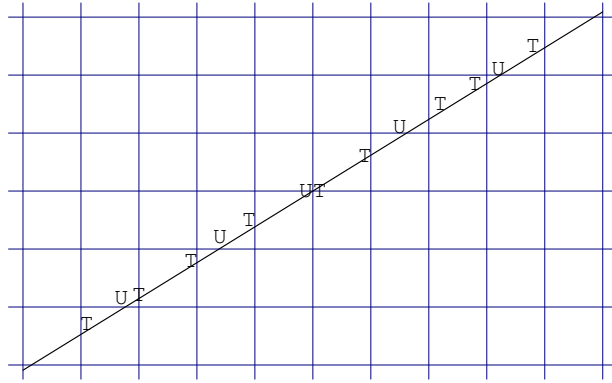


図 3: カット列

このような現象の本質的な理由は, この列が一次元無理回転  $x \rightarrow \eta'x$  の coding となっていることである. さて, 同様のことを  $\theta$  で行う.

$$\mathcal{T}_\lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} x_{-i}(\theta')^i \mid x_{-i} = 1 \rightarrow x_{-i-1} = x_{-i-2} = x_{-i-3} = x_{-i-4} = 0 \right\}$$

を考えると複素平面内の compact 集合である. 同様に

$$\begin{aligned} (\theta')^{-1}\mathcal{T}_\lambda &= \mathcal{T}_\lambda \cup \mathcal{T}_{.1} \\ (\theta')^{-2}\mathcal{T}_\lambda &= \mathcal{T}_\lambda \cup \mathcal{T}_{.1} \cup \mathcal{T}_{.01} \\ &\dots \\ (\theta')^{-6}\mathcal{T}_\lambda &= \mathcal{T}_\lambda \cup \mathcal{T}_{.1} \cup \mathcal{T}_{.01} \cup \mathcal{T}_{.001} \cup \\ &\quad \mathcal{T}_{.0001} \cup \mathcal{T}_{.00001} \cup \mathcal{T}_{.000001} \cup \mathcal{T}_{.100001} \end{aligned}$$

のように成長していく (図 4).

今度はタイルは 5 種類ある. 全く同様に原点が  $\mathcal{T}$  の内点であるので, 複素平面はこれらの 5 種のタイルでタイル張りされることが証明される.

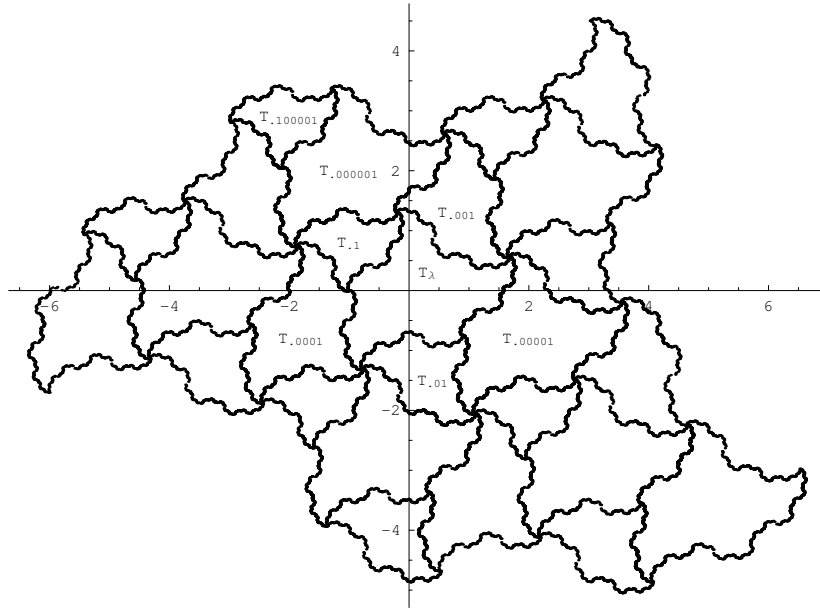


図 4: 最小 Pisot 数による双対タイル張り

このタイル張りは複素平面での無理回転  $z \rightarrow \theta'z$  の coding と考えることもできるだろう. ただし黄金比シフトの場合のように両側無限語ではなくタイルの幾何学的形状は簡単ではない ([2]). なお, この場合タイルが円盤と同相なことが Luo によって示された ([59]).

## 5 タイル張りと数系の有限性条件

§3, §4 の構成がタイル張り, すなわち一重被覆, になるかどうかは, 数系の性質と密接に関係している.  $\text{Fin}(\beta)$  を有限なベータ展開の全体とする.  $\text{Fin}(\beta)$  は明らかに  $\mathbb{Z}[1/\beta]$  の非負の元からなる. ( $\beta$  が代数的整数なので  $\mathbb{Z}[\beta] \subset \mathbb{Z}[1/\beta]$  に注意する.) Frougny-Solomyak [37] は, ベータ展開による数系において

$$\text{Fin}(\beta) = \mathbb{Z}[1/\beta] \cap \mathbb{R}_+$$

が成立するか否かを問題とした. この等式を満たすことを有限性条件 (F) を満たすという.

条件  $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+ \subset \text{Fin}(\beta)$  のもとで  $\beta$  は Pisot 数であることが導かれる ([4]) ので (F) ならば  $\beta$  は Pisot 数である. 逆は成り立たない. 特に  $\beta$  の

最小多項式の定数項が正であれば,  $\beta$  はそれ自身以外の正の共役をもつので (F) は成立しない. また (F) を満たすか否かを判定するアルゴリズムが存在する ([1]). 包含関係は図 2 のようになる.

(F) の十分条件もいくつか知られている.  $d_\beta(1) = c_1 c_2 \dots$  に対して  $c_i \geq c_{i+1}$  が全ての  $i$  で成立するとき  $\beta$  は Pisot 数であり非負整数係数の  $\beta$  の多項式で表せる数は全て  $\text{Fin}(\beta)$  に属する. 加えて  $\beta$  が単純 Parry 数でもある場合 (F) を満たす. これを Frougny-Solomyak 型と呼ぼう ([37]).  $\beta$  の最小多項式が  $x^d - a_{d-1}x^{d-1} - a_{d-2}x^{d-2} - \dots - a_0$  の形で  $a_i \geq 0$ ,  $a_{d-1} > a_0 + a_1 + \dots + a_{d-2}$  ならば (F) を満たす. これを Hollander 型という ([44]). 三次の Pisot 単数で (F) を満たすものの最小多項式は

1.  $x^3 - ax^2 - (a+1)x - 1$ ,  $a \geq 0$
2.  $x^3 - ax^2 - bx - 1$ ,  $a \geq b \geq 1$  (Frougny-Solomyak 型)
3.  $x^3 - ax^2 - 1$ ,  $a \geq 1$  (Hollander 型)
4.  $x^3 - ax^2 + x - 1$ ,  $a \geq 1$

と分類される ([4]).

$\beta$  が有限性条件 (F) を満たす Pisot 単数ならば  $\mathbb{R}^{d-1}$  の原点は  $\mathcal{T}_\lambda$  の内点であり, 他のタイル  $\mathcal{T}_\omega$  ( $\omega \neq \lambda$ ) は原点を含まない. このように他のタイルに属さない内点を排他的内点といい, このように原点が  $\mathcal{T}$  の排他的内点である場合には, タイル張りが生成される.

一般の Pisot 数では, この有限性条件は必ずしも成立しない. このように原点が内点とならない場合でも次の弱い有限性が成立すれば, 同様のタイル張りが作れることも知られている.

**(W)** 任意の  $\varepsilon > 0$  と  $z \in \mathbb{Z}[1/\beta] \cap \mathbb{R}_+$  に対して  $x, y \in \text{Fin}(\beta)$  があって  $z = x - y$ ,  $|y| < \varepsilon$  を満たす.

純周期的 beta 展開をもつ  $\mathbb{Z}[\beta]$  の元の集合を  $\mathcal{P}$  とすれば  $\omega \in \mathcal{P}$  について原点  $0 \in \mathcal{T}_\omega$  が成り立ち他のタイルは 0 に近づけない. すなわち 0 は  $\bigcup_{\omega \in \mathcal{P}} \mathcal{T}_\omega$  の排他的内点である. これを利用すると (W) が成立することと  $\mathcal{T}_\omega$  の全体がタイル張り, すなわち一重被覆, となることは同値であることが示せる. 特に (W) の下で  $\mathcal{T}_\omega$  の境界の  $d-1$  次元 Lebesgue 測度は 0 となる ([6]). この弱有限性 (W) は全ての Pisot 数の持つ性質ではないかと予想されており重要な未解決問題である (Sidorov [73], [74]). [7] では, 三次の Pisot 単数など幾つかの類に対して (W) を示している.

## 6 マルコフ分割と準周期軌道

このように sofic シフトを幾何学的に実現することは、トーラス上の無理回転の coding と Markoff 分割の具体的構成に密接に関連しており、このことが、Pisot 数系の研究の大きな動機づけとなっている。sofic シフトに対応し  $T_\beta^k(1) = .c_k c_{k+1} \dots$  の全体は有限集合となるので  $t_1, t_2, \dots, t_\ell$  と書く。このとき  $\hat{X}_\beta = \bigcup_{i=1}^{\ell} (-\mathcal{T}_i) \times [0, t_i)$  に  $T_\beta$  の自然拡大

$$\hat{T}_\beta : \hat{X}_\beta \ni (x, y) \rightarrow (G_1(x) - \Phi(\lfloor \beta x \rfloor), \beta y - \lfloor \beta y \rfloor) \in \hat{X}_\beta$$

が定義され、ベータシフト  $X_\beta$  の factor となる。  $\hat{X}_\beta$  は定義により幾つかの筒状集合の和であり、この自然な分割が Markoff 分割を与える。これにより  $T_\beta$  の準周期軌道の全体を記述することが出来る。この小論の formulation で記述すれば

**定理 2** ([42], [41], [47], [34] (順に一般化)).  $x \in \mathbb{Q}(\beta) \cap [0, 1)$  のベータ展開が純周期的であることと  $(\Phi(x), x) \in \hat{X}_\beta$  は同値である。

がなりたつのである。証明の主要部は、Markoff 分割に常に付きまとう二つの筒状集合の共通部分、すなわち境界の問題である (測度零であるからといって無視できない)。この場合には境界上に  $\mathbb{Q}(\beta) \cap [0, 1)$  からくる純周期軌道は存在しない事を示すことのできるのである。

より詳しく調べるには  $\hat{X}_\beta$  の形状を明示する必要がある。二次の Pisot 単数の場合には  $\hat{X}_\beta$  は長方形二つの合併と同等になり結果が見やすいが、三次以上の場合にはフラクタル境界をもつ図形が現れる。また単数でない場合には  $p$ -進附値に関する埋め込みも併せ考える必要が生じる (c.f. [21])。またこの自然拡大は  $d_\beta(1)$  から定義される Parry [65] の意味の characteristic polynomial が既約の場合には  $\mathbb{T}^d$  の自己同型と位相共役となる。この場合には Arnoux-伊藤の理論でこの Markoff 分割の構成を捕らえ直すことができる。この理論は高次元無理回転を幾何学的 substitution で具体的に実現するものであり、現在も高次元連分数への応用などへ研究が進んでいる。そのアイデアは [68] に遡り、生じるフラクタル集合は Rauzy フラクタルと総称されている (c.f. [16], [34], [33], [67])。

数系に基づいた Markoff 分割は構成が具体的であり、タイル張りの位相構造が易しい場合には、数系の代数的情報から幾何学的な情報を取り出したり、逆にフラクタル的な位相構造から数論的情報を得ることができる。例えば [1] によって

**定理 3.** *Pisot* 単数  $\beta$  が (F) を満たすならば, 十分小さい正の有理数のベータ展開は純循環する.

が成立するが, これは (F) 条件の下で原点が  $\mathcal{T}_\lambda$  の排他的内点であることの帰結である. また

**定理 4.** 最小 *Pisot* 数  $\theta$  によるベータ展開を考える.  $[0, c] \cap \mathbb{Q}$  の全ての元のベータ展開が純循環するような最大の  $c$  は  $0.66666666608644067488\dots$  で与えられる. さらに  $(0, 1)$  に値をとる狭義の増大列  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$  が存在し  $[a_{4i}, a_{4i+1}]$  内の有理数は純循環でなく,  $[a_{4i+2}, a_{4i+3}]$  内の有理数は純循環である.

というような現象が導ける ([8]). 後者の定理はフラクタル構造の反映であり純代数的に導くのは困難と思われる. このようなフラクタルの幾何と数論の連携は *Pisot* 双対タイル張り研究の一つの動機でもある.

## 7 タイル張りの位相構造

*Pisot* 数系タイル張りの位相構造を調べることは応用上重要である. しかしながら知られていることは意外に少ない. *Pisot* 単数  $\beta$  を固定すればタイルの連結性は多くの場合容易に示せる. これには畑 [43] の連結性の十分条件を用いればよい. 従ってこの場合の問題は, 個別の *Pisot* 数でなくその族をどう扱うかである. 一般に

**定理 5.**  $\beta$  が *Pisot* 単数であって  $d_\beta(1) = c_1 c_2 \dots c_\ell$  のとき  $c_\ell = 1$  ならば  $\mathcal{T}_\omega$  が連結である.

が成り立つ ([3], [12]). ‘ $c_\ell = 1$  ならば’ と書いたがこの仮定は数値実験では常に成立している. 言い換えると *Pisot* 単数  $\beta$  が単純 Parry 数の場合はタイルは連結と思われる.

一般の Parry 数  $\beta$  は代数的整数であるが,  $d_\beta(1)$  の前周期を  $c_1 \dots c_M$  とし, 周期を  $c_{M+1} \dots c_{M+\ell}$  とすると  $|c_M - c_{M+\ell}|$  は  $\beta$  の絶対ノルムと等しいのではないかと予想される. 類似の現象は数系タイル張りに共通に見られる. 「力学系的に定義されるノルムと代数的ノルムが一致」という形にとらえることができるのではないかと思うのだが知られていることは少ない.

研究者間では, 連続する整数を用いた数系のタイルは連結であろうと漠然と信じられていた. 特に全ての *Pisot* 双対タイルは当然連結であろう

と考えられていたのだが最近の Gjini との共同で以下のような思いがけない結果を導いた ([11], [12]).

**定理 6.** 3 次の Pisot 単数に対して  $T_\omega$  は連結である. 4 次の場合には最小多項式  $x^4 - ax^2 - bx^2 - cx - d$  において  $d = -1$  のとき連結である.  $d = 1$  のときは常に不等式  $a + c - 2[\beta] \leq 1$  が成り立ち,  $a + c - 2[\beta] \leq 0$  のとき連結,  $a + c - 2[\beta] = 1$  の場合には非連結である.

この時点では  $a + c - 2[\beta] = 1$  の場合少なくとも一つのタイルが非連結という主張であったが, その後全てのタイルが無限個の連結成分を持つことも示すことに成功した. 高次元では全く未解決である.

連結性に限ってもこれだけ問題が残っているにもかかわらず, タイルの境界の記述は難しくない. Pisot 双対タイルの境界はオートマトン (無限路のため Buchi Automaton) で記述される. このことは隣接分野の研究者には良く知られているが, 論文等に明記されていないのでここで概略を書いておく. (詳しくは [45] の記述を参照. ただし考えている数系はより易しい標準数系と呼ばれるものである.) 最初に, (W) 条件のもとでは  $T_\omega$  たちは  $\mathbb{R}^{d-1}$  の一重被覆をなし, その境界は二つ以上のタイルの共通部分であることを注意する. ラベル付有向グラフを以下のように導入する.  $\mathbb{Z}[\beta]$  を頂点集合としその二点  $z_0, z_1$  と  $a, b \in \mathcal{A} = \{0, 1, \dots, [\beta] - 1\}$  に対して  $z_0 = \beta z_1 + a - b$  が成り立つ時,

$$z_0 \xrightarrow{ab} z_1$$

という  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$  のラベル付きの辺を書く. これは無限グラフであるが,  $z_0$  が適当な原点中心の区間に入って  $\Phi$  による像がある原点中心の球  $B$  に入るものを考えると, その本質的部分グラフ (どの頂点からも出て行く辺と入ってくる辺が必ずあるような部分グラフ) は, 区間および球  $B$  が十分大ならば, そのサイズに依存せず一意に定まる. 一方, ベータシフトの禁止語による制限もまたオートマトンで記述される. この二つのオートマトンの認識する無限路の共通部分を認識するオートマトンは直積法により求められる. こうして得られたこの有限グラフ上の無限路は,  $T_\lambda$  と  $T_\omega$  ( $\omega \neq \lambda$ ) の共通部分にある元全体を表すので  $T_\lambda$  の境界が記述できたことになる. このオートマトンにより  $T_\omega$  の境界はグラフ付反復関数系のアトラクターになることがわかる. このオートマトンはタイル張りの隣接オートマトンと呼ばれ, タイル張りの位相構造研究の方法の中で大きな役割を果たす.



隣接オートマトンのサイズは一般に固有値の絶対値が 1 に近い共役が存在すると非常に大きくなることが知られている. 固定したタイルでなくタイル張りの族の性質を調べたい時にはこれが障害になる. 境界を記述することに目的を限定すれば接触オートマトンと呼ばれるサイズの小さいオートマトンを構成できる (c.f. [39], [70], [71]).

## 8 関係する話題

数系の定義は様々にあるが, 特に Kátai 等が精力的に研究した標準数系には周期的なフラクタルタイル張りが付随し全シフトが対応している (例えば [52], [38], [55]). 従って多くの事柄が Pisot 数系と平行に議論ができ簡単になる. 例えば, 対応するタイルがいつ円盤と同相か, 多重点がどれほどあるかなどの疑問にも詳しい回答が出来る場合がある ([5], [9], [10]). 二次の標準数系の生成する平面タイル張りであっても, タイルが円盤と同相にならない場合は多く, 例えば 3 重点が非加算となる病的なタイルも稀ではない. Pisot 数系の場合にもこれと同様の現象が観察されている.

一般の数集合  $\mathcal{A}$  と拡大的行列の組からできる周期的フラクタルタイル張りの分類の研究にも多くの研究がある (例えば Lagarias-Wang [56], [79]). 特に Gröchenig-Haas [39] が導入した Wavelet 解析を用いる手法はこの種のタイル張りの研究に大きな役割を果たしている.

Pisot 数系と標準数系などを包括し記号力学系とより密接に関連するシフト基数系という概念が考えられ, 最近精力的に基本的な性質が調べられている ([13]).

Penrose タイル張りなども含む種々のタイル張りに付随する力学系とそのスペクトル理論については [75] を見よ.

Bertrand の指摘した別法によっても, 一般の代数的数に付随した sofic シフトの算術的実現と双曲型トーラス同型写像の Markoff 分割ができる. そのアイデアを発展させた構成法の提案が Kenyon-Vershik [53] でなされている. Pisot 双対タイル張り同様に, この場合も難しい問題は「何重被覆となるか」である.

周期的結晶構造と相容れない 5 角対称などの X 線回折像を持つ実在の構造が知られており準結晶と呼ばれている. その数学的モデルとして高次元格子を無理方向に射影するいわゆる射影法が良く知られている ([61]). 射影法を用いない Pisot 数系による構成が近年脚光を浴びている ([17], [40], [14]).

## 9 謝辞

原稿を読んで貴重なコメントや参考文献の情報などをいただいたレフェリー及び田村純一氏, 小松尚夫氏, 安富真一氏, 伊藤俊次氏に感謝いたします.

## 参考文献

- [1] S. Akiyama, Pisot numbers and greedy algorithm, in ‘Number Theory, Diophantine, Computational and Algebraic Aspects’, ed. K. Gyóry, A. Pethő and V.T.Sós, de Gruyter 1998, 9–21.
- [2] S. Akiyama and T. Sadahiro, A self-similar tiling generated by the minimal Pisot number, *Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis* **6** (1998), 9–26.
- [3] S. Akiyama, Self affine tiling and Pisot numeration system, in ‘Number Theory and its Applications’, ed. K. Gyóry and S. Kanemitsu, Kluwer 1999, 7–17.
- [4] S. Akiyama, Cubic Pisot units with finite beta expansions, in ‘Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis’, ed. F.Halter-Koch and R.F.Tichy, de Gruyter 2000, 11–26.
- [5] S. Akiyama and J. Thuswaldner, Topological properties of two-dimensional number systems, *J. Theor. Nombres Bordeaux* **12** (2000), 69–79.
- [6] S. Akiyama, On the boundary of self affine tilings generated by Pisot numbers, *J. Math. Soc. Japan*, **54** no. 2 (2002), 283-308.
- [7] S. Akiyama, H. Rao and W. Steiner, A certain finiteness property of Pisot number systems, to appear in *J. Number Theory*.
- [8] S. Akiyama and K. Scheicher, Intersecting Two-Dimensional Fractals with Lines, submitted.
- [9] S. Akiyama and J. Thuswaldner, On the topological structure of fractal tilings generated by quadratic number systems, submitted.

- [10] S. Akiyama and J. Thuswaldner, A survey on topological properties of tiles related to number systems, to appear in *Geom. Dedicata*.
- [11] S. Akiyama and N. Gjini, Connectedness of number theoretic tilings, submitted.
- [12] S. Akiyama and N. Gjini, On the connectedness of self-affine attractors, to appear in *Arch. Math. (Basel)*.
- [13] S. Akiyama, T. Borbely, H. Brunotte, A. Pethó, J. Thuswaldner, Generalized radix representations and dynamical systems I, submitted.
- [14] S. Akiyama, F. Bassino, and Ch. Frougny, Automata for arithmetic Meyer sets, *Proceedings of LATIN 04*, to appear in *Lecture Notes in Comput. Sci. (2004)*.
- [15] P. Arnoux, Chapter 6: Sturmian Sequences, in ‘Substitution in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics’, *Lecture Notes in Math. 1794*, Springer-Verlag, 143–198.
- [16] P. Arnoux and Sh. Ito, Pisot substitutions and Rauzy fractals, *Journées Montoises d’Informatique Théorique (Marne-la-Vallée, 2000)*, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, **8** (2001), no. 2, 181–207.
- [17] C. Burdik, Ch. Frougny, J. P. Gazeau, and R. Krejcar, Beta-integers as natural counting systems for quasicrystals, *J. Phys. A* **31** (1998), 6449-6472.
- [18] F. Bassino, Beta-expansions for cubic Pisot numbers, in *LATIN’02*, **2286** in LNCS, Springer 2002, 141–152.
- [19] J. Berstel and P. Séébold, A characterization of Sturmian morphisms, *Mathematical Foundations of Computer Science, 1993*, (Gdańsk, 1993), 281–290, *Lecture Notes in Comput. Sci.*, **711**, Springer, Berlin, 1993.
- [20] J. Berstel and P. Séébold, Chapter 2: Sturmian words, in ‘Algebraic combinatorics on words’, M.Lothaire, Cambridge U.P. 2002, 40–95.

- [21] V. Berthé and A. Siegel, Purely periodic  $\beta$ -expansions in a Pisot non-unit case, preprint.
- [22] M. J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse and J. P. Schreiber, Pisot and Salem numbers, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 1992.
- [23] A. Bertrand, Développement en base de Pisot et répartition modulo 1, C. R. Acad. Sci., Paris, Ser A-B **385** (1977), 419–421.
- [24] F. Blanchard,  $\beta$ -expansion and symbolic dynamics, Theoret. Comput. Sci., **65** (1989), 131–141.
- [25] D. W. Boyd. Salem numbers of degree four have periodic expansions. in ‘Number theory’, Walter de Gruyter 1989, 57–64.
- [26] D. W. Boyd. On beta expansions for Pisot numbers. Math. Comp, **65** (1996), 841–860.
- [27] D. W. Boyd. On the beta expansion for Salem numbers of degree 6. Math. Comp., **65** (1996), 861–875.
- [28] T. Brown, Descriptions of the characteristic sequence of an irrational, Canad. Math. Bull. **36** (1), (1993), 15–21.
- [29] H. Brunotte, On trinomial basis of Radix Representations of Algebraic Integers, Acta Sci. Math. (Szeged), **67** (2001), 407–413.
- [30] E. M. Coven and G. A. Hedlund, Sequences with minimal block growth, Math. Systems Theory **7** (1973), 138–153.
- [31] E. M. Coven, Sequences with minimal block growth. II, Math. Systems Theory **8** (1974/75), 376–382.
- [32] D. Crisp, W. Moran, A. Pollington, P. Shiue, Substitution invariant cutting sequences. J. Theor. Nombres Bordeaux, **5** (1993), no. 1, 123–137.
- [33] H. Ei, Sh. Ito and H. Rao, Atomic surfaces, tilings and coincidence III:  $\beta$ -tilings, Preprint 2003.

- [34] H. Ei, Sh. Ito and H. Rao, Purely periodic  $\beta$ -expansion with Pisot unit base, Preprint 2003.
- [35] L. Flatto, J. Lagarias and B. Poonen, The zeta function of the beta transformation, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **14** (1994), 237–266.
- [36] A.S. Fraenkel, M. Mushkin and U. Tassa, Determination of  $[n\theta]$  by its sequence of differences, *Canad. Math. Bull.* **21** (4), (1978), 441–446.
- [37] Ch. Frougny and B. Solomyak, Finite beta-expansions, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **12** (1992), 713–723.
- [38] W. J. Gilbert, Radix representations of quadratic number fields, *J. Math. Anal. Appl.* **83** (1981), 263–274.
- [39] K. Gröchenig and A. Haas, Self-similar lattice tilings. *J. Fourier Anal. Appl.* **1** (1994), 131–170.
- [40] L. S. Guimond, Z. Masáková, E. Pelantová, Arithmetics on beta-expansions, to appear in *Acta Arith.*
- [41] M. Hama and T. Imahashi, Periodic  $\beta$ -expansions for certain classes of Pisot numbers, *Comment. Math. Univ. St. Paul.* **46** (1997), no. 2, 103–116.
- [42] Y. Hara and Sh. Ito, On real quadratic fields and periodic expansions, *Tokyo J. Math.*, **12** (1989), 357–370.
- [43] M. Hata, On the Structure of Self-Similar Sets, *Japan J. Appl. Math.* **2** (1985), 381–414.
- [44] M. Hollander, Linear Numeration systems, Finite Beta Expansions, and Discrete Spectrum of Substitution Dynamical Systems, Ph.D. thesis, University of Washington, 1996.
- [45] K. H. Indlekofer, I. Kátai, P. Racsco, Number systems and fractal geometry, in ‘Probability theory and applications’, *Math. Appl.*, **80**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992, 319–334.

- [46] Sh. Ito and H. Rao, Atomic surfaces, tilings and coincidence I: Irreducible case, Preprint 2002.
- [47] Sh. Ito and Y. Sano, On periodic  $\beta$ -expansions of Pisot numbers and Rauzy fractals, *Osaka J. Math.* **38** (2001), no. 2, 349–368.
- [48] Sh. Ito and Y. Takahashi, Markov subshifts and realization of  $\beta$ -expansions, *J. Math. Soc. Japan*, **26** (1974), no. 1, 33–55.
- [49] Sh. Ito and S. Yasutomi, On continued fractions, substitutions and characteristic sequences  $[nx + y] - [(n - 1)x + y]$ , *Japan. J. Math. (N.S.)*, **16** (1990), no. 2, 287–306.
- [50] T. Kamae and L. Zamboni, Sequence entropy and the maximal pattern complexity of infinite words, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **22-4** (2002), 1191–1199.
- [51] T. Kamae and L. Zamboni, Maximal pattern complexity for discrete systems, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **22-4** (2002), 1201–1214.
- [52] I. Kátai and I. Kőrnyci, On Number Systems in Algebraic Number Fields, *Publ. Math. Debrecen* **41** no. 3–4 (1992), 289–294.
- [53] R. Kenyon and A. Vershik, Arithmetic construction of sofic partitions of hyperbolic toral automorphisms, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **18** (1998), no. 2, 357–372.
- [54] T. Komatsu, A. J. van der Poorten, Substitution invariant Beatty sequences. *Japan. J. Math. (N.S.)*, **22** (1996), no. 2, 349–354.
- [55] B. Kovács and A. Pethő, Number systems in integral domains, especially in orders of algebraic number fields, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **55** (1991), 287–299.
- [56] J. C. Lagarias and Y. Wang, Self-affine tiles in  $\mathbb{R}^n$ , *Adv. Math.* **121** (1996), 21–49.
- [57] D. Lind and B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge Univ. Press 1995.

- [58] W. F. Lunnon and P. A. B. Pleasants, Characterization of two-distance sequences, *J. Austral. Math. Soc. (Ser. A)*, **53** (1992), 198–218.
- [59] J. Luo, A note on a self-similar tiling generated by the minimal Pisot number, *Fractals*, **10** No. 3 (2002), 335-339.
- [60] A. A. Markov, Sur une question de Jean Bernoulli, *Math. Ann.*, **19** (1882), 27–36.
- [61] Y. Meyer, Quasicrystals, Diophantine approximation and algebraic numbers, in ‘Beyond Quasicrystals’, F.Axel, D.Gratias (eds.), Les Editions de Physique, Springer (1995).
- [62] M. Morse and G. A. Hedlund, Symbolic Dynamics, *Amer. J. Math.* **60** (1938), 815–866.
- [63] M. Morse and G. A. Hedlund, Symbolic Dynamics II. Sturmian trajectories, *Amer. J. Math.* **62** (1940), 1–42.
- [64] I. Nakajima, J. Tamura and S. Yasutomi, \*-Sturmian words and \*-complexity, to appear in *J. Theor. Nombres Bordeaux*.
- [65] W. Parry, On the  $\beta$ -expansions of real numbers, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **11** (1960), 269–278.
- [66] B. Parvaix, Proprietes d’invariance des mots sturmiens, *J. Theor. Nombres Bordeaux*, **9** (1997), no. 2, 351–369.
- [67] B. Praggastis, Numeration systems and Markov partition from self-similar tilings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **351** (1999), no.8, 3315-3349.
- [68] G. Rauzy, Nombres Algébriques et substitutions, *Bull. Soc. France*, **110** (1982), 147–178.
- [69] A. Rényi. Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **8** (1957), 477–493.

- [70] K. Scheicher and J. M. Thuswaldner, Canonical number systems, counting automata and fractals. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **133-1** (2002), 163–182.
- [71] K. Scheicher and J. M. Thuswaldner, Neighbours of self-affine tiles in lattice tilings. In *Proceedings of the Conference ‘Fractals in Graz’* (2002), P. Grabner and W. Woess, Eds., 241–262.
- [72] K. Schmidt, On periodic expansions of Pisot numbers and Salem numbers, *Bull. London Math. Soc.*, **12** (1980), 269–278.
- [73] N. Sidorov, Bijective and general arithmetic codings for Pisot toral automorphisms, *J. Dynam. Control Systems*, **7** (2001), no. 4, 447–472.
- [74] N. Sidorov, Ergodic-theoretic properties of certain Bernoulli convolutions, *Acta Math. Hungar.* **101** (2003), no.2, 345–355.
- [75] B. Solomyak, Dynamics of self-similar tilings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **17** (1997), no. 3, 695–738.
- [76] B. Solomyak, Conjugates of beta-numbers and the zero-free domain for a class of analytic functions. *Proc. London Math. Soc.*, **68** (1994), 477–498.
- [77] J. Tamura, Certain sequences making a partition of the set of positive integers, *Acta Math. Hungar.* **70** (1996), 207–215.
- [78] W. P. Thurston, *Groups, Tilings and Finite state automata*, AMS Colloquium lectures, 1989.
- [79] Y. Wang, Self-affine tiles. in ‘*Advances in wavelets*’ (Hong Kong, 1997), Springer, Singapore, 1999, 261–282.
- [80] S. Yasutomi, On Sturmian sequences which are invariant under some substitutions, in ‘*Number theory and its applications*’ (Kyoto, 1997), ed. S.Kanemitsu and K.Györy, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, 347–373.