数系タイル張り入門*

秋山 茂樹 (AKIYAMA Shigeki)
新潟大・理 (Faculty of Science, Niigata Univ.)

1 数系タイル張りの原始型: Knuth の Twin Dragon

筆者は作用素環一般に関して知識がないが Cuntz 環と概念的に近い自己相似性をもつタイル張りを、簡単な例を用いて紹介することで参加したいとおもう。なおタイル張りに関してすでに多数の雑文を書いているので、ここでは簡潔な紹介にとどめ、他の文書をどのように眺めたらよいかの指針とすることを目的とする。

数系からできるフラクタル集合でもっとも有名なのものは Cantor 集合であろう。これは、[0,1] の実数を 3 進小数表示したとき 1 を禁止した集合 C と思うことができる。ただし、$1000\ldots$ と 1 の後に 0 が続くものは $1 = .222\ldots$ と考えられるので C に含める。すなわち

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} \;\middle|\; a_i \in \{0, 2\} \right\}$$

である。C は $3C = C \cup (C+2)$ という集合方程式を満たす $\mathbb{R}$ の非空な compact 集合と特徴づけることもできる。2 番目によく知られているものは Knuth の Twin Dragon である。これは $\alpha = 1 + \sqrt{-1}$ として

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha^{-i} \;\middle|\; a_i \in \{0, 1\} \right\}$$

という複素数の部分集合でその形状は大変美しい。C 同様、集合方程式 $\alpha K = K \cup (K+1)$ を満たす $\mathbb{C}$ の非空な compact 集合と特徴付けられる。C, K ともに片側 full shift $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ の factor となっているがその実現のされ方が異なるので形状は全く異なる。特に重大な違いは C は $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度が 0 なのに K は正となることである。実は **$0 \in \mathbb{C}$ が K の内点である。** これは簡単な事実だが自明ではない。集合方程式より

$$\begin{aligned} \alpha K &= K \cup (K+1) && (1) \\ \alpha^2 K &= \alpha K \cup (\alpha K + \alpha) = K \cup (K+1) \cup (K+\alpha) \cup (K+\alpha+1) && (2) \end{aligned}$$

*短期共同「クンツ環のフラクタル集合上の表現と数理物理への応用」2002/11/27

であり、繰り返すと

$$\alpha^n K = \bigcup_{a_i \in \{0,1\}} \left(K + a_n + a_{n-1}\alpha + \cdots + a_1 \alpha^{n-1}\right)$$

を得る。これは symbolic に K を記述すると

$$\{.a_1 a_2 a_3 \dots\}$$

であるが $\alpha^n K$ は

$$\{a_1 a_2 a_3 \dots a_n . a_{n-1} a_{n-2} \dots\}$$

と n 回シフトした結果であり、そのことを幾何的に表現しただけである。しかしその意味は大きい。0 が K の内点なのだから $n \to \infty$ とすれば $\alpha^n K$ はいかなる大きさの球も含む事ができる。すなわち次を得る。

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n, a_i} \left(K + \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha^{n-i} \right)$$

ここで右辺の和は全ての n と $a_i \in \{0,1\}$ をわたる。一方で、異なる二つのタイル $K + \sum_{i=1}^n a_i \alpha^{n-i}$ は重ならない。すなわち μ_2 を $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ とみなした時の自然な 2 次元 Lebesgue 測度とすると

$$\mu_2(\alpha K) = 2\mu_2(K) = \mu_2(K) + \mu_2(K+1) - \mu_2(K \cap (K+1))$$

より $\mu_2(K \cap (K+1)) = 0$ である。同様に $\omega \neq \omega'$ を $\sum_{i=1}^n a_i \alpha^{n-i}$ の形の二つの元とすると

$$\mu_2((K+\omega) \cap (K+\omega')) = 0$$

も成り立つ。すなわち $\mathbb{C}$ は K で**タイル張り**される。

$\alpha = -1 + \sqrt{-1}$ に対して $\mathbb{Z}[\alpha]$ の任意の元は $0, 1$ を alphabet として $\sum_{i=1}^n a_i \alpha^{n-i}$ の表示を持つことが知られている。このように代数的整数 α が与えられ、全ての $\mathbb{Z}[\alpha]$ の元が $a_i \in \{0, 1, \dots, |N(\alpha)| - 1\}$ を用いて $\sum_{i=1}^n a_i \alpha^{n-i}$ と表示される時 α は**標準数系**をなすと呼ばれる。標準数系という性質は、一見すると普遍的性質のように思えるが、大変な細かい特殊事情で成立するのである。たとえば $-\alpha = 1 - \sqrt{-1}$ でも代数的状況は大差ないように思えるがこれは標準数系にはならない。与えられた代数的整数がいつ標準数系をなすかは、難しい問題で、2 次では [16],[17],[11] で解決を見たが 3 次以上では未解決である。[18], [9], [4], [5]

標準数系に対しては、Knuth の Twin Dragon と同様にタイル張りを構成することができる。その核心は同様に原点が一タイルの内点となることにある。[15], [6]

さらに、一般に $GL_n(\mathbb{Z})$ の元 A でそのすべての固有値の絶対値が 1 より大のものを考える。$q = |\det A|$ とし、零でない $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ の元に対し、

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} A^{-i}(k_i \mathbf{v}) \;\middle|\; k_i \in \{0, 1, \dots, q-1\} \right\}$$

という集合がタイル張りを成すか議論することも可能である。[8] さらにこのアルファベット集合 $\{k\mathbf{v}\}$ をさらに一般の q 元集合として、いつタイル張りを成すかを論ずるという方向も研究が進んでいるが、これについては、[19], [28], [27] などを参照されたし。特に、どのようなアルファベット集合がタイル張りを導くかを研究した [12], [21] では、Wavelet が重要な役割を成しているのは注目すべきだろう。

2　ベータ展開と Pisot 数系タイル張り

以上述べたのは対応する記号力学系が full shift の場合だが、sofic shift の場合でもタイル張りを付随させることができる場合がある。これは Cuntz-Krieger 環に対応するのでこの集会のテーマと関係あるかもしれない。$\beta > 1$ を固定する。ベータ変換 T_β とは $[0,1)$ 上の piecewise linear な変換

$$T_\beta : x \longrightarrow \beta x - \lfloor \beta x \rfloor,$$

の事である。繰り返すと

$$x \xrightarrow{x_1} T_\beta(x) \xrightarrow{x_2} T_\beta^2(x) \xrightarrow{x_3} \dots$$

が得られる。ただし $x_i = \lfloor \beta T_\beta^{i-1}(x) \rfloor$ である。すると $x \in [0,1)$ は次のように展開される。

$$x = \frac{x_1}{\beta} + \frac{x_2}{\beta^2} + \frac{x_3}{\beta^3} \dots = .x_1 x_2 x_3 \dots .$$

さらに一般の実数 $x > 0$ に対して整数 $m > 0$ を取って $\beta^{-m-1}x \in [0,1)$ とできるので、

$$x = x_{-m}\beta^m + \dots + x_{-1}\beta + x_0 + \frac{x_1}{\beta} + \dots = x_{-m} \dots x_{-1} x_0 . x_1 x_2 x_3 \dots ,$$

という表示ができる。これを x の**ベータ展開**という。このベータ展開に現れる言語全体により定義されるアルファベット $\{0, 1, \dots, \lfloor \beta \rfloor\}$ 上のシフトをベータシフト X_β という。この X_β がどのようなシフト空間をなすかを記述するのに本質的なのは、1 の展開と呼ばれるもので

$$1 \xrightarrow{a_1} T_\beta(1) \xrightarrow{a_2} T_\beta^2(1) \xrightarrow{a_3} \dots .$$

により生成される右無限文字列 $d_\beta(1) = .a_1 a_2 a_3 \dots$ である。$\{0, 1, \dots, \lfloor \beta \rfloor\}$ による有限語 $x_1 x_2 \dots x_n$ がベータ展開として実現されるかどうかは $x_1 x_2 \dots x_n$ の任意の suffix $x_m x_{m+1} \dots x_n$ が $d_\beta(1)$ より辞書式順序で小なことと同値である。$d_\beta(1)$ が有限、すなわちある場所以降は 0 が続くならば X_β は有限型サブシフトであり、有限でなくても周期性をもつならば X_β は sofic shift となる。

1 より大の実代数的整数で、自分自身と異なる共役の絶対値が全て 1 より小なるものを Pisot 数と言う。Pisot 数 β に対して、$\mathbb{Q}(\beta)$ の正の元のベータ展開は循環

する。[25] 特に、$d_\beta(1)$ も循環するので X_β はsofic shift である。このような Pisot 数によるベータ展開のことを Pisot 数系とよぶ。Pisot 数系は整数による通常の展開と類似点が多い。たとえばベータ展開の意味で小数部分のないものの集合 Y は実軸で相対稠密で一様離散でありさらに強く $Y-Y$ も同様である。このような集合は Meyer 集合といって **準結晶** の構成に現れる。

W.P.Thurston [26] は Pisot 数系に対するタイル張りを与える方法を提唱した。以下、例を用いて説明する。$\omega=(1+\sqrt{5})/2$ とし、θ を x^3-x-1 の正根としよう。どちらも Pisot 数であり、$d_\omega(1)=.11$, $d_\theta(1)=.10001$ となるのでどちらも有限型シフトである。X_ω は $\{0,1\}$ を用いた両側無限語で 11 を禁止したものであり、黄金比シフトとか Fibonacci シフトと呼ばれている。また X_θ はやはり $\{0,1\}$ を用いた両側無限語で 11,101,1001,10001 を禁止したものである。$\omega'=(1-\sqrt{5})/2$, θ' を θ の共役根の一つとする。（もうひとつは $\overline{\theta'}$ である。）このとき、基本的なタイルは

$$T=\left\{\sum_{i=0}^{\infty} x_{-i}\omega'^i \mid x_{-i}\in\{0,1\},\quad x_{-i}x_{-i-1}=0\right\}$$

である。これはベータ展開を逆の方向に伸ばしたもので記号的には

$$\{\ldots x_{-3}x_{-2}x_{-1}x_0.\}$$

である。ただし、通常の意味では収束しないので ω の代わりにその共役 ω' を用いて収束させている。T の幾何学的形状が問題になるが、この場合は容易で T は区間 $[-1,\omega]$ となる。すなわち再び**原点は T の内点である。**Twin Dragon の時と同様に今度は右シフトを施してみると

$$(\omega')^{-1}T=T\cup T_{.1}$$

を得る。ここで $T_{.1}$ は記号的には $\{\ldots x_{-3}x_{-2}x_{-1}.1\}$ と書ける。すなわち小数部分が .1 となるものの集合である。しかし、11 は禁止であるから x_{-1} は 0 になる。すなわち

$$(\omega')^{-1}T=T\cup(\omega'T+\omega'^{-1})$$

が成り立つ。（前後するが実際にはこの集合方程式の解の一意性から $T=[-1,\omega]$ が分かるのである。）$U=\omega'T=[-1,1/\omega]$ と置こう。$\omega'^{-1}=-\omega$ だから

$$\omega'T+\omega'^{-1}=[-1-\omega,1/\omega-\omega]=[-\omega^2,-1]$$

なので幾何学的に表現すると区間 T を右シフトすることで左に区間 U が連結される。この状況は σ を $\{T,U\}$ からなる語の半群の反準同型（すなわち $\sigma(xy)=\sigma(y)\sigma(x)$ を満たす写像）で

$$\sigma(T)=UT,\quad \sigma(U)=T$$

を満たすものを考えるとよりその構造が鮮明である。すなわち

$$\begin{aligned}\sigma T &= UT\\ \sigma^2 T &= UTT\\ \sigma^3 T &= UTUTT\\ \sigma^4 T &= UTUTTUTT\\ \sigma^5 T &= UTUTTUTUTTUTT\end{aligned}$$

のようにタイル T が左右に成長していくのである。より印象的に書けば

$$\begin{array}{rl} U & T\\ U & TT\\ UTU & TT\\ UTU & TTUTT\\ UTUTTUTU & TTUTT\\ UTUTTUTU & TTUTTUTUTTUTT\\ UTUTTUTUTTUTTUTUTTUTU & TTUTTUTUTTUTT\end{array}$$

となる。この列は両側 Sturm 列を生成し様々な興味深い性質を満たすことが知られている。その本質的な理由は、この列が一次元無理回転 $x \to \omega' x$ の coding となっていることである。

さて、同様のことを θ で行う。

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} x_{-i}(\theta')^i \mid x_{-i} = 1 \to x_{-i-1} = x_{-i-2} = x_{-i-3} = x_{-i-4} = 0 \right\}$$

を考えると複素平面内の compact 集合である。同様に

$$\begin{aligned}(\theta')^{-1}T &= T \cup T_{.1}\\ (\theta')^{-2}T &= T \cup T_{.1} \cup T_{.01}\\ &\cdots\\ (\theta')^{-6}T &= T \cup T_{.1} \cup T_{.01} \cup T_{.001} \cup\\ & \quad T_{.0001} \cup T_{.00001} \cup T_{.000001} \cup T_{.100001}\end{aligned}$$

のように成長していく。今度はタイルは 5 種類ある。全く同様に原点が T の内点であるので、複素平面はこれらの 5 種のタイルでタイル張りされることが証明される。この、タイル張りは複素平面での無理回転 $z \to \theta' z$ の coding を与えるの

で、Sturm 列の自然な拡張であると考えることができる。ただし黄金比シフトの場合のように幾何学的形状は簡単ではない。 [2] このように原点が T の排他的内点である場合には、タイル張りが生成されるということは証明が容易である。この幾何学的性質は、Pisot 数系の有限性とよばれる代数的性質と対応している。[1], [10]

一般の Pisot 数では、この有限性条件は必ずしも成立しない。このように原点が内点とならない場合にもある種の弱い有限性が成立すれば、同様のタイル張りが作れることも知られている。[3]

このように sofic shift を幾何学的に実現することは、トーラス上の無理回転の coding と Markoff 分割の具体的構成に密接に連関しており、このことが、Pisot 数系の研究の大きな動機づけとなっている。[7], [23], [24]

参考文献

[1] S. Akiyama, *Self affine tiling and Pisot numeration system*, Number Theory and its Applications, ed. by K. Győry and S. Kanemitsu, 7–17 Kluwer 1999.

[2] S.Akiyama and T.Sadahiro, A self-similar tiling generated by the minimal Pisot number, Acta Math. Info. Univ. Ostraviensis, vol. 6 (1998) 9–26.

[3] S. Akiyama, *On the boundary of self affine tilings generated by Pisot numbers*, Journal of Math. Soc. Japan, vol. 54, no. 2 (2002), 283–308.

[4] S. Akiyama and A. Pethő, *On canonical number systems*, Theoretical Computer Science, **270** (2002) 921-933.

[5] S. Akiyama and H. Rao, *New criteria for canonical number systems*, to appear in Acta Arithmetica.

[6] S. Akiyama and J. Thuswaldner, *On the topological structure of fractal tilings generated by quadratic number systems*, submitted.

[7] P. Arnoux and Sh. Ito, *Pisot substitutions and Rauzy fractals*, Journés Montoises d'Informatique Theorique (Marne-la-Vallé, 2000). Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **8** (2001), no. 2, 181–207.

[8] C. Bandt, *Self-similar tilings and patterns described by mappings*, The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order, Kluwer, (1997), 45–83.

[9] H.Brunotte, *On trinomial basis of Radix Representations of Algebraic Integers*, Acta Sci. Math. (Szeged) **67** (2001) 407–413.

[10] C. Frougny and B. Solomyak, *Finite beta-expansions*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **12** (1992), 713–723.

[11] W. J. Gilbert, *Radix representations of quadratic number fields*, J. Math. Anal. Appl. **83** (1981), 263–274.

[12] K. Gröchenig, A. Haas, *Self-similar lattice tilings*, J. Fourier. Anal. Appl. **1** (1994), 131-170.

[13] Sh. Ito and Y. Takahashi, *Markov subshifts and realization of β-expansions*, J. Math. Soc. Japan 26 (1974) no. 1, 33–55

[14] J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 713–747.

[15] I. Kátai and I. Kőrnyei, *On Number Systems in Algebraic Number Fields*, Publ. Math. Debrecen **41** no. 3–4 (1992), 289–294.

[16] I. Kátai and B. Kovács, *Canonical number systems in imaginary quadratic fields*, Acta Math. Hungar. **37** (1981) 159–164.

[17] I.Kátai and B. Kovács, *Kanonische Zahlensysteme in der Theorie der quadratischen Zahlen*, Acta Sci. Math. (Szeged) **42** (1980) 99–107.

[18] B. Kovács and A. Pethő, *Number systems in integral domains, especially in orders of algebraic number fields*, Acta Sci. Math. Szeged, **55** (1991) 287–299.

[19] R. Kenyon, *Self-replicating tilings*, Symbolic Dynamics and Its Applications (P. Walters Ed.), Contemporary Math. **135** 239–263, Amer. Math. Providence RI, 1992.

[20] B. Kovács and A. Pethő, *Number systems in integral domains, especially in orders of algebraic number fields*, Acta Sci. Math. Szeged, **55** (1991), 287–299.

[21] J. C. Lagarias and Y. Wang, *Self-affine tiles in $\mathbb{R}^n$*, Adv. Math. **121** (1996), 21–49.

[22] W. Parry, *On the $\beta-$expansions of real numbers*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **11** (1960), 401–416.

[23] B. Praggastis, *Markov partition for hyperbolic toral automorphism*, Ph. D. Thesis, Univ. of Washington, 1992.

[24] G. Rauzy, *Nombres Algébriques et substitutions*, Bull. Soc. France **110** (1982),147–178.

[25] K. Schmidt, *On periodic expansions of Pisot numbers and Salem numbers*, Bull. London Math. Soc., **12** (1980), 269–278.

[26] W. P. Thurston, *Groups, Tilings and Finite state automata*, AMS Colloquium lectures, 1989.

[27] A. Vince, *Digit Tiling of Euclidean Space*, in Directions in mathematical quasicristals, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 329–370.

[28] Y. Wang, *Self-affine tiles. Advances in wavelets* (Hong Kong, 1997), Springer, Singapore, 1999, pp. 261–282.

秋山茂樹
Shigeki AKIYAMA

新潟大学理学部数学教室
新潟市五十嵐 2 の町 8050
e-mail: akiyama@math.sc.niigata-u.ac.jp