数系フラクタルタイルの位相的構造

秋山茂樹 · 新潟大

1. はじめに

数系とは数を有限個の文字を用いた文字列で表示する方法の事を言う。たとえば我々の 10 進数系は $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ という 10 個の文字により数を表示する方法である。数系はある種のフラクタル図形と密接に関係していることは古くから知られている。なかでも最も著名なものはカントールの三進集合やシェルピンスキーの集合であろう。数系を一般化する方法は様々知られているがここで扱うのは Pisot 数系と標準数系の二つである。この二つの数系はそれぞれ対応するタイル張りが存在し、そのタイルの境界は多くの場合非常に複雑なフラクタル構造をなす。これらのタイル張りは、数論、特にディオファントス近似論との関係で興味深い対象であるが、各タイルの位相的構造は私の知る範囲ではあまり調べられていないようである。これを統一的に調べるのが研究の目的である。

2. Pisot 数系の場合

実数 $\beta > 1$ を固定する。任意の正の実数 x を

$$x = \sum_{i=N_0}^{\infty} a_{-i}\beta^{-i}$$

と展開したい。ただし $a_i \in [0,\beta) \cap \mathbb{Z}$ とする。このような展開は次のような条件を加えると一意的に存在する。

$$(G) \qquad \forall N \geq N_0 \quad \left| x - \sum_{i=N_0}^{N} a_{-i}\beta^{-i} \right| < \beta^{-N}$$

この条件を greedy condition という。以下このような性質をもつ展開を β 展開と呼ぶ。一般の実数 β を取り扱うこともできるが数論的にもエルゴード理論的にも、もっとも面白い場合は次のような有限性条件を満たす場合である。

$$(F) \qquad \mathrm{Fin}(\beta) = \mathbb{Z}[1/\beta]_{\geq 0}$$

ここで $\mathrm{Fin}(\beta)$ は有限 β 展開の全体の集合とする。この条件を満たす β はすぐに分かるように代数的整数であるが、さらに自分自身をのぞく全ての共役の絶対値が 1 より小となる。すなわち Pisot(-Vijayaraghavan) 数という特別なクラスに属する事が分かる。逆に Pisot 数であっても (F) を満たさない例も多数あるので (F) の特徴づけ問題が生じる。いくつかの興味深い十分条件は得られているが、現状ではこの問題への満足すべき回答はまだ得られているとは言い難い。さて以下、 β が (F) を満たすと仮定する。$\mathrm{Fin}(\beta)$ をその小数部分 ω で分類すると

$$\mathrm{Fin}(\beta) = \bigsqcup_{\omega} S_{\omega}$$

を得る。S_ω は小数部分 ω を持つ有限 β 展開の集合である。β の次数を n とし写像 $\Phi : \mathbb{Q}(\beta) \to \mathbb{R}^{n-1}$ を通常の $\mathbb{Q}(\omega)$ の $\mathbb{R}^n$ への埋め込みの non trival part とする。すると上の分類した式に Φ を施すことで次が証明できる。

$$\mathbb{R}^{n-1} = \bigsqcup_{\omega} \overline{\Phi(S_\omega)}$$

ここで $\overline{A}$ は A の $\mathbb{R}^{n-1}$ の通常の位相による閉包である。以下 $T_\omega = \overline{\Phi(S_\omega)}$ と書く。特に小数部分がない β 展開の全体の集合は空語 λ を用いて S_λ と表される。対応する T_λ を中心タイルと呼ぶ。次の事は定義から容易に示せる。

1: T_ω は合同変換を除き有限である。
2: 同じ形の T_ω は平行移動で重なる。

従ってこの T_ω による $\mathbb{R}^{n-1}$ の分割はタイル張りと思える。このようなタイルの構成は W.P.Thurston によるがこの手のタイルの第一発見者は G.Rauzy である。その後は力学系の研究者 B.Solomyak, R.Kenyon, A.Vershik 日本では S.Ito のグループなどにより進められた。それらはタイル張りの様々な拡張や、Substitution Dynamics との関連などへの興味深い発展があり雄大なものである。しかし後述するようなタイルの位相的性質を精密に研究するという方向（数論的には重要と思える）には進んでいないようである。

さてタイル張りと言うからにはそれらがあまり重ならないことが重要である。これを保証するには β が単数であることが必要である。

Theorem 1 (A.)**.** β を Pisot 単数で (F) を満たすものとする。このとき原点 $\Phi(0)$ は中心タイルの内点である。

このことは数の幾何を用いて比較的簡単に証明されるが、このタイル張りにおいて基本的である。実際つぎの事が示せる。

Corollary 1. 各タイル T_ω はその内部の閉包と一致する。すなわち $T_\omega = \overline{\mathrm{Inn}(T_\omega)}$ がなりたつ。

Corollary 2. タイルの境界は閉集合で、μ_{n-1} を $n-1$ 次元 Lebesgue 測度とすると $\mu_{n-1}(\partial(T_\omega)) = 0$ が成り立つ。

タイルの位相的構造に関してはまだ未解決の部分が多い。たとえば

1: 各タイルは弧状連結か？
2: タイルの境界の構造は？
3: タイルの内点集合の構造は？

という自然な疑問が生じるがどれもまだ最終的な解答は得られていない。最初の疑問 1 に関連して筆者は「力学系ノルム予想」という自然な予想を提出した。これは β 展開により定義されるある種のノルムが絶対値の意味で通常のノルムと一致するという予想である。実際に多数の数値実験で確かめることができ、成立のための十分条件もいくつか分かってきている。この予想が正しいならば各タイルは実際に弧状連結となる事が示せる。二番目の疑問については次が予想される。

Conjecture 1. 各タイル T_ω の境界は有限個の「グラフつき自己アファイン集合」の合併である。

自己アファイン集合は自分自身記述する集合方程式もっているが、この方程式を連立方程式の形に拡張したものが「グラフつき自己アファイン集合」である。

部分的な結果として少なくとも 3 次の場合 $\mathrm{Inn}(T_\omega)$ が連結ならば予想 1 は正しい事が分かる。この $\mathrm{Inn}(T_\omega)$ に関する条件を確かめるためのアルゴリズム (encircling method) が存在する事もわかる。この方法で Pisot 数を具体的に固定すれば予想 1 を多くの場合確かめることができるが、一般的にはまだ分からない。従って三番目の問題は二番目のものと密接に関連していることが分かる。三番目の問題に関しては 3 次の場合にできる平面タイル張りに限定すると以下の精密な予想が可能となる。まず β を 3 次の Pisot 単数とする。このとき $\mathrm{Irr}(\beta)$ を β の最小多項式とすると β が (F) を満たすことと

$$\mathrm{Irr}(\beta) = x^3 - Ax^2 - Bx - 1, \quad A \geq 0, \quad -1 \leq B \leq A+1$$

が同値である。3 個以上のタイルの共有点を頂点と呼ぶ。$V(T_\omega)$ を T_ω の頂点の集合とする。このとき

Conjecture 2. 上の記号のもとで次が成り立つ。

1. $A > 2B - 4$ ならば各タイルは単連結（従って連結）である。$V(T_\omega)$ は有限集合である。
2. $A = 2B - 4$ ならば各タイルは無限個の連結成分を持つ。$V(T_\omega)$ は可算無限集合である。
3. $A < 2B - 4$ ならば各タイルは無限個の連結成分をもつ。$V(T_\omega)$ は非可算集合である。

この予想に関しては $A \leq 2B - 4$ ならば各タイルは無限個の連結成分をもち $V(T_\omega)$ は無限集合であること、また $A < 2B - 4$ ならば $V(T_\omega)$ は非可算集合であることは示せた。また予想を支持する多くの計算例がある。興味深い点は、誰しも通常考える β が総実か否かという区別は、一見するとタイルの位相的構造とは直接の関係ではないように見える事である。

3. 標準数系の場合

代数的整数 α を固定し $\mathcal{N} = \{0, 1, \ldots, |N(\alpha)| - 1\}$ と置く。但し $N(\cdot)$ は $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ のノルムである。このとき

Definition 1. $(\alpha, \mathcal{N})$ が標準数系であるとは任意の $x \in \mathbb{Z}[\alpha]$ が

$$x = \sum_{i=0}^{N} a_i \alpha^i, \qquad a_i \in \mathcal{N}$$

という表現を持つことを言う。

このような有限表現は存在すれば一意的である。$\mathcal{N}$ は α のみにより定まるので $(\alpha, \mathcal{N})$ が標準数系をなすという代わりに α が標準数系をなすと言うこともある。標準数系に関する最初の考察は Knuth に見られる。彼は自然数 $n \geq 2$ に対し $-n$ が標準数系をなすことを注意し、さらに $-1 + \sqrt{-1}$ が標準数系をなす事、そこから二頭の龍（Twindragon）と呼ばれる美しいフラクタルタイルを構成できることに注意した。その後の発展は主に I.Kátai を中心とするハンガリーの数学者による。I.Kátai と B.Kovács は二次の標準数系を完全に分類した。彼らの仕事は整数環の元に限って表現する形で述べられているが、少し言い替えると次のように述べることができる。

Theorem 2 (Kátai & Kovács)**.** 二次の代数的整数 α の最小多項式を $\mathrm{Irr}(\alpha) = x^2 + Ax + B$ とするとき、α が標準数系をなすことと

$$-1 \leq A \leq B \geq 2$$

は同値である。

一般の代数的整数がいつ標準数系をなすのかは Pisot 数系での (F) の特徴付けと対応するおもしろい問題で Kovác や Pethö らの仕事がある。現状では満足できる簡単な代数的特徴付けは得られていない。Kátai と Környei は標準数系をさらに一般化したものを考え、タイリングとの関係を記述した。

Theorem 3 (Kátai & Környei)**.** α を代数的整数でその全ての共役の絶対値が 1 より大とする。$\mathcal{N}$ を modα の完全代表系とし、Φ を $\mathbb{Q}(\alpha)$ から $\mathbb{R}^n$ への標準的埋め込みとする。ここで $n = \deg \alpha$ である。このとき

$$\mathcal{F} = \left\{ \sum_{1}^{\infty} a_i \Phi(\alpha^{-i}) \ : \ a_i \in \mathcal{N} \right\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の compact な集合で

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{\omega \in \mathbb{Z}[\alpha]} (\mathcal{F} + \Phi(\omega))$$

が成立する。さらに $\mathbb{Z}[\alpha]$ の任意の元が有限表現 $\sum_{i=0}^{N} a_i \alpha^i$ を持つならば $(\alpha, \mathcal{N})$ または α は数系をなすという。もし α が数系をなすならば上記のタイリングは、異なる $\omega_i \in \mathbb{Z}[\alpha]$, $(i = 1, 2)$ に対して

$$\mu_n((\mathcal{F} + \omega_1) \cap (\mathcal{F} + \omega_2)) = 0$$

を満たす。ここで μ_n は n 次元 Lebesgue 測度である。

この定理は数系に対応するタイル張りは一枚のタイルの平行移動で実現され、タイルどうしの交わりは測度 0 であることを示しており基本的である。実際この定理は原点が $\mathcal{F}$ の内点であることや $\mathcal{F} = \mathrm{Inn}(\mathcal{F})$ を含んでいる。Pisot 数系の場合には原点が中心タイルの内点であることを先に導くことでタイルの交わりが測度 0 であることや $\mathcal{T} = \mathrm{Inn}(\mathcal{T})$ を導いたのであったが、この場合にもそのような手順で再証明することも可能である。

さて、計算機による実験をしてみれば分かるが標準数系の場合のタイリングと Pisot 数系の場合のタイリングは見かけ上よく似ている。しかし標準数系から生じるタイリングは周期的であるのでその扱いはかなり易しくなる。まず次が示せる。

Theorem 4 (A & Thuswaldner)**.** $\mathcal{F}$ は弧状連結である。

さらに $\partial(\mathcal{F})$ は有限個のグラフ付き自己アファイン集合の合併であろうと予想できる。また Pisot 数系の場合と同様に 2 次の標準数系の場合次が示せる。$\mathrm{Irr}(\alpha) = x^2 + Ax + B$ とすると

Theorem 5 (A & Thuswaldner)**.** $2A \geq B + 3$ ならば $\mathrm{Inn}(\mathcal{F})$ は無限個の連結成分をもち $V(\mathcal{F})$ は無限集合である。さらに $2A > B + 3$ のとき $V(\mathcal{F})$ は非加算集合である。

筆者は最近次の結果を示すことができた。

Theorem 6 (A)**.** $2A < B + 3$ ならば $\mathrm{Inn}(\mathcal{F})$ は単連結（従って連結）である。このとき $V(\mathcal{F})$ は 4 個または 6 個の元からなりそれらは完全に具体的に記述される。$\partial(\mathcal{F})$ は有限個のグラフ付き自己アファイン集合の合併であり、その集合方程式も具体的に記述される。

これにより、2 次標準数系の場合にはかなり満足すべき結果を得られたことになる。目下、この議論が Pisot 数系の場合に使えないか検討中である。