数論と力学系

秋山 茂樹

1　数論は女王？

「数学は科学の女王であり、数論は数学の女王である」はガウスの言葉であるが、女王という言葉の意味について時々立ち止まって考えさせられる。「女王」は「美」を意味する言葉として用いられているのだろうか。美しさを語るなら、数学のどの分野にも広がりと深さ、そして美しさがある。数論の専売特許ではない。実際微分幾何の創始者でもあるガウスは、測量の必要性から出発し曲率概念を定義し第二基本形式が第一基本形式で記述されるという「驚異の定理」などに到達した。今でもその深さと美しさは数学者ならば誰も疑いを挟まない。

では数学の中で数論が女王とされる理由はなんだろう。当たり前のことであるが数論の面白さは「整数の面白さ」である。整数の見かけはとても単純なのに、積構造の原子にあたる素数の分布でさえ極めて難しい。方程式の求解を考えても整数で解くのは複素数で解くのと比べれば格段に難しい。

数は人間の必要で生じてきたが整数論の問題は実際の生活に必要なものではない。偶数が素数二つの和で書けるか。双子素数が無数にあるか。フェルマー方程式に整数解があるか。このような問題は知的興味から生まれた問題であって生活臭がない。要するに、解けても解けなくてもどちらでもよい。そのような知的好奇心の満足のみを目指す学問が愛されるのは人類の生活水準が上がり知的興味に時間を割けるようになったからだろう。

数論の歴史的未解決問題は当然のことながら非常に難しい。数学の全ての分野の知識を総合して立ち向かわなければならない問題もでてくる。しかし一方で数論の問題は「解けなくてもよい」いわば知的娯楽なのである。これが数論の問題が他分野と一線を画する最大の理由に思えるのだがどうだろう。もしかするとこれが女王の名前の由来かもしれない。

2　コード化と数の必然性

整数とはなんだろうか。数の概念は一対一対応から事物のもつ諸性質を取り除いた（捨象した）ものである。「数」は一対一対応が理解できるほどの知能を持つ生物でないと理解しえない抽象概念である。生産性が向上してくると扱う数量は大きくなり一対一対応では無数の文字が必要となる。これでは様々な困難が生じる。このような必要からは数概念と**有限個の**文字による文字列との一対一対応が望ましい。インドで位取り記数法のアイデアが生まれ、世界に広がっていったのは自然の成り行きと思える。

連続量を扱う状況では、たとえば水を数えるためにバケツ一杯、コップ一杯などの単位で数えるなど連続量の離散化も必然的に生じる。このように社会の要請により数概念は必然的に生じてくることに注意しよう。数は人間の集団生活の必要性から生まれるのである。

連続量を離散化することは数学の根本を成している。すなわちアナログデジタル変換である。この中で連続的な問題が離散的な問題するときに生ずる困難、すなわち、アナログをデジタルにしたときに生ずる問題を考えるのが整数論である。

3　６進法の優位性：位取り記数法

数が幾つか集まったら一束としてまとめ、束が幾つか集まったら一塊（単位はなんでもよい）と数えるという技術は、情報を短縮して伝えるため必然的なアイデアで人間集団のごく初期的な段階からみられる。位取り記数法の最大のアイデアは、この束、塊、といった単位の代わりに 0 という文字を用いて繰り上がりを表すことである。具体的には b という底をさだめ $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ という文字だけを用いて自然数が

$$n = \sum_{i=1}^{\ell} a_i b^i = a_\ell a_{\ell-1} \ldots a_0$$

と表現される。これが b 進数表示で b^1 が一束、b^2 が一塊である。 クヌース [8] によると $b = 10$ という手の指の数を用いる方法以外にも試みはいろいろあったようだ。底 b の選択は人類の文化に強い影響を与えている。素数 2 で割り切れる数は偶数、割り切れない数が奇数である。偶奇は、もともとの意味を超えて「奇妙」とか「odd」という言葉に現れている。

この言葉が人類に使われるようになった理由は 10 が 2 で割り切れるからである。このため 10 進表示の一番下の位の数だけで偶奇がわかる。これが分かりやすいので偶数奇数の概念はだれでも知っている言葉に広がったのである。小さい素数で割り切れるかどうかというのは、物の分配などの日常的な要求でも大変有用である。

このことを考えると進法の b としては 6 を選ぶのが正しいと思う。なぜなら適度な文字数ですべての数を表せ、小さい素数 $2,3,5,7$ での可除性が簡単に判定できる唯一の数が 6 なのである。3 で割り切れるかどうかの判定は 2 の次に重要で $b=6$ をとれば、これが下一桁でできる。$b=6$ を選んでいれば人類の言語と文化に深く影響を与えていだろう。過去に最も合理的な b の選択を行おうとする為政者が居なかったのは残念である。九九の暗唱は五五となってずっと小学生の負担も軽い。不合理な選択であっても $b=10$ が定着してしまうと変更はもはや困難である。人類の歴史をみると我々が合理的な生命体とはいえないだろうが、より合理的な生命体なら $b=6$ を用いているに違いない。もちろん 6 が 10 なのであるが。

4　位取り記数法と力学系

力学系は、古典力学の完成ともに発展し、微分方程式の時間発展を調べるために生まれた学問である。特に多体運動を調べると微分方程式の解は非常に複雑なふるまいをする。このため熱力学、統計力学的現象を理解することがその力学系理論に課せられた目標となった。したがって力学系は空間 $\mathbb{X}$ 内の物体の運動と時間遷移を前提とし未来の統計的予測することを目標としている。前節の数論の立ち位置を考えれば、力学系は役立つ数学であり「実際に応用可能な」数学である。空間には大きさを測る道具として測度が与えられ、軌道が再帰的であるか、軌道の平均的挙動などが数学的に定義され問題とされる。

以下では時間は離散的とし、測度空間 $(\mathbb{X},\mu)$ に自己写像 T が定義され μ は可測集合 A に対して $\mu(T^{-1}(A))=\mu(A)$ を満たすとする。このような μ を T の不変測度という。$T(x)$ が x の一秒後の位置を表すと考えると良い。このような三つ組み $(\mathbb{X},\mu,T)$ を測度論的力学系という。[1]ここではさらに $\mu(\mathbb{X})$ が有限と仮定し $\mu(\mathbb{X})=1$ と正規化して確率空間としておく。

[1]可測集合のシグマ代数の記述は省く。

例として数論と力学系の原始的なつながりを位取り記数法に見てみよう。位取り記数法には二つの異なる力学系が対応している。第一の力学系は区間 $[0,1)$ からそれ自身への写像

$$T : x \mapsto bx - \lfloor bx \rfloor$$

である。これを理解するには x の小数展開

$$x = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b^i}$$

を考えよう。

$$bx = a_1.a_2 a_3 \ldots$$

で $a_1 = \lfloor bx \rfloor$ であるから

$$T(x) = 0.a_2 a_3 \ldots$$

が成り立つ。つまり文字列が左側に一つシフトされた小数となる。これを繰り返すことで $a_1, a_2, \ldots$ は順に得られることになる。この不変測度は一次元ルベーグ測度 ν となる。

第二の力学系は自然数全体 $\mathbb{N}$ に働くもので

$$S : x \mapsto (x - d)/b$$

である。d は x を b で割った余りである。

$$n = \sum_{i=0}^{\ell} a_i b^i = a_\ell a_{\ell-1} \ldots a_1 a_0$$

という b 進表示を考えると $d = a_0$ だから

$$(n - d)/b = a_\ell a_{\ell-1} \ldots a_1$$

となって、これも b 進表示で右端の文字がなくなり、文字列が右にシフトする写像である。実はこちらの方が第一のものより馴染みが深い力学系で、10 で一束とすると最後に余るのが a_0, 次に 10 束ずつ集めて余りが a_1 束という風に、小さい方から順に数字が決定されていく。

第一の力学系は最大の b^i の係数から決めていくが第二のものは、最小の b^i の係数から決めるので表示を決定する方向性は逆である。第一の方法は強欲算法、第二は剰余算法とも呼ばれる。

5　力学系と数論の会話の重要性

位取り記数法のようなごく単純なアルゴリズムでも力学系の立場からの考察することができる。第一の力学系に対して個別エルゴード定理を用いるとほとんど全ての実数について、小数に出てくる文字列は期待される統計的頻度で生ずる。たとえば 10 進法で 298 という文字列は 1/1000 の頻度で現れる。数論では、このような統計的規則に従う実数を正規数と呼んでおり、様々な問題が考えられている。

逆に力学系に対して刺激を与えるのは第二の力学系かもしれない。自然数全体には一様な確率測度を与えることはできないから、そのまま統計的議論を持ち込むことはできない。ここには p-進数のような別の位相と不変測度をいれて研究することが考えられる。このように数論と力学系は少し会話するだけでも刺激的である。

歴史的に力学系と数論は数論的アルゴリズムの統計的挙動の研究を通じて古くから会話を続けてきた。本稿の目的はその一端を紹介する事である。

6　有界剰余集合と誘導力学系

α を無理数とし $[0,1)$ からそれ自身への写像

$$U : x \mapsto x + \alpha \bmod 1$$

を考える。区間 $[0,1)$ の両端を糊付けした周囲長 1 の円を考えると α だけ回転する操作であるので**無理回転**と呼ばれる力学系 (図 1) で、一次元ルベーグ測度 ν が不変確率測度となる。可測集合 I があって

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_I(U^i(x)) - n\nu(I)$$

が有界となるとき I を有界剰余集合という。ここで χ_I は集合 I の特性関数である。すなわち $x \in I$ のとき $\chi_I(x) = 1$ そうでないとき 0 とする。この値は $U^i(x)$ が $[0,1)$ にどれほど一様に近く分布するかを表す。様々な方法で I が区間ならば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_I(U^i(x)) - n\nu(I) \right) = 0$$

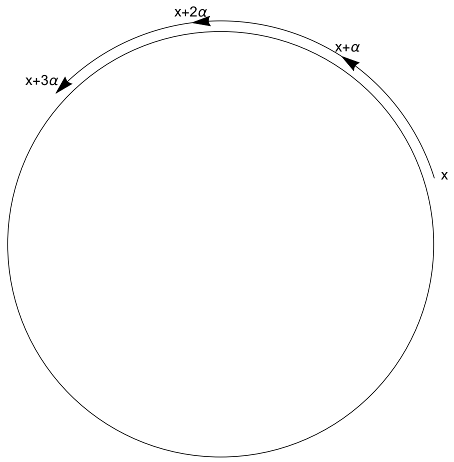

図 1: 無理回転

が証明できる。これを $(U^i(x))$ が**一様分布**するという。有界剰余集合は、これよりも強いことを要求していることに注意しよう。別の言い方をすると $\langle i\alpha\rangle \in I$ となる $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ の個数と期待される $n\nu(I)$ との差が有界な集合ということである。ここで $\langle x\rangle = x - \lfloor x \rfloor$ は x の小数部分である。有界剰余集合の問題は整数論、とくにディィオファントス近似論の基本問題の一つである。

一般にどんな点列 $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ をとっても

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_I(x_i) - n\nu(I)$$

が有界でない区間 I が存在することが知られている。この値の区間 I に関する上界は **Discrepancy** と呼ばれる量でロス、シュミットにより精密に研究された。その大きさは $\log n$ で割っても決してゼロに収束しない。したがって**有界剰余集合は近似が異常によい部分集合**である。ヘッケ, オストロフスキー, ケステンは半開区間に限ると I が有界剰余集合となるための必要十分条件は整数 m があって I の長さが $\langle m\alpha\rangle$ と表示できることであることを示した。

こうなれば二次元のトーラス上の無理回転 (図 2) で同じ問題を考えたくなるのは必然である。すなわち $1, \alpha, \beta$ を $\mathbb{Q}$ 上一次独立な実数として、$v = (\alpha, \beta)$ を考えるとクロネッカーの定理により $nv \bmod \mathbb{Z}^2$ は $[0,1)^2$ で稠密となる。したがって $U : x \mapsto x + v$ を $[0,1)^2$ に作用させた力学系でも同様に有界剰余集合が定義できる。この場合、二次元ルベーグ測度 ν_2

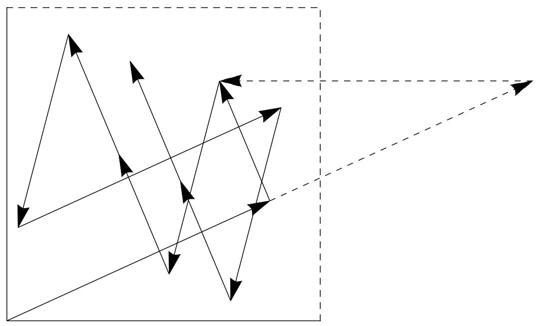

図 2: トーラス上の無理回転

が不変測度である。多くの数学者が考え様々な有界剰余集合を見つけたが、問題の本質に迫るブレークスルーはなかなか見つからなかった。この問題は一筋縄では解決しない難問であることが徐々に理解されていく。

そこで本稿の主人公ロジー (G. Rauzy) が登場する。ロジーは力学系の研究者であるが、数論にも造詣が深くきわめて基本的な結果をいくつも導いた。この問題に関するロジーの美しい結果を述べるために誘導力学系を定義しよう。$(\mathbb{X}, \mu, T)$ を測度論的力学系とし正な測度をもつ部分集合 A にたいして $m(x) \in \mathbb{N}$ を $T^n(x) \in A$ となる最小の自然数 n とし $\hat{T}(x) = T^{m(x)}(x)$ を第一帰還写像という。ポアンカレの再帰性定理によりほとんどすべての $x \in \mathbb{X}$ に対して $m(x)$ は存在し、従って $\hat{T}$ が定義される。$(A, \frac{1}{\mu(A)}\mu, \hat{T})$ も測度論的力学系となる。すなわち $\frac{1}{\mu(A)}\mu$ は $\hat{T}$ の不変測度となる。この新しい力学系を誘導力学系という。ロジー [10] は $([0,1)^2, \nu_2, x \mapsto x+v)$ の部分集合 $\mathbb{Y}$ が有界剰余集合であるための十分条件を

1. ある $\mathbb{R}^2$ の格子 M が存在して $\mathbb{Y}$ の二元 x, y はもし $x - y \in M$ なら $x = y$

2. ある $u \in \mathbb{R}^2$ があって $\mathbb{Y}$ への誘導力学系は $x \mapsto x + u \bmod M$ である。

で与えた。一言でいえば誘導力学系もまた格子上の無理回転になること、すなわちある種の力学系の自己相似性が有界剰余集合の本質だと看破したのである。証明は対応するコバウンダリーが有界かどうか調べるというもので、とても見通しが良い。良い証明は後から見ると自明に見えるという例かもしれない。

出来上がった証明を見てからなら、人は幾らでも賢くなれる。数学者は模倣でない本質的なアイデアを発見した人をこよなく尊敬するのである。ロジーのアイデアの発展は Haynes-Koivusalo [7]、Grepstad-Lev [6] を参照のこと。後者は長方形型の有界剰余集合に関して大きな進歩を与えている。

7 ロジーフラクタル

前節で述べたようにロジーは数論的アルゴリズムの研究において様々な結果を得るのに誘導力学系の中で「よいもの」を取ることが重要である事に気が付いた。これは現在も大変重要なテーマである。ロジーはこのアイデアをいろいろな方向に発展させた。

数学における発展にはサイクルのような構造がある。一つの理論ができるとそこから本質を取り出して一般化する。一般化が行き詰まったり、他の学問の刺激を受けたりすると、問題を徹底的に具体化する必要が生ずる。そこには新しい現象、新しい数学の萌芽が見つかる。その本質を取り出して一般化する。ここから新しい発展が生まれる。このように一般化と具体化は対立の関係でなく相補的関係にあるが、ロジーの数学の手法の特徴は、その徹底的な具体化にある。

$\alpha \in \mathbb{R}$ を $x^3 - x^2 - x - 1$ の実根とすると $1, \alpha, \alpha^2$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立だから $v = (\alpha, \alpha^2)$ に関して有界剰余集合が考えられる。ロジーはこの具体的な場合に関して具体的な有界剰余集合を（境界の記述を除いて）与えた。それはフラクタルな境界をもつ集合であって、構成方法もとても驚くべきものである。

文字 $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ を考え $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = ac$, $\sigma(c) = a$ という文字の置き換えの規則を考える。σ には準同型の性質すなわち $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ を仮定する。この仮定により σ は $\mathcal{A}^*$ の半群準同型となる（演算は文字列の連結)。さて a に σ を何度も行うと次のように文字列が成長する。

$$
\begin{aligned}
\sigma(a) &= ab \\
\sigma^2(a) &= abac \\
\sigma^3(a) &= abacaba \\
\sigma^4(a) &= abacabaabacab \\
\sigma^5(a) &= abacabaabacababacabaabac
\end{aligned}
$$

このように右に伸びていく無限語が自然に定義され $\sigma(w) = w$ を満たす。この文字列を幾何学的に見るため a, b, c の文字に $\mathbb{R}^3$ の単位ベクトルを対応させると階段上に伸びていく無限折れ線 (図 3) が w に対応することが分かる。

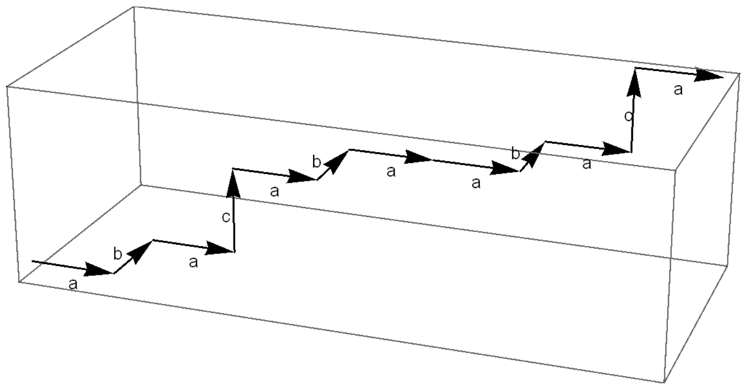

図 3: 無限語の幾何学的実現

この折れ線は行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の最大固有値 α の固有ベクトル方向の直線に巻き付くように進んでいく。折れ線の端点の集合を固有ベクトルに沿って縮小的な平面に射影するとできるのが現在ロジーフラクタルと呼ばれる図形である (図 4)[9]。

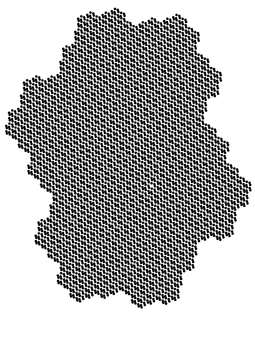

図 4: ロジーフラクタル

この図形の境界は非整数のフラクタル次元をもつジョルダン閉曲線で

あり、この図形が境界の点たちをうまく選ぶと二次元トーラス $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の有界剰余集合となる。その本質的な理由は σ の持っている力学系としての自己相似性を幾何学的に実現したからで、誘導力学系が自己相似構造を持つように作ったから前節の条件を満たすのである。これによりロジーフラクタルは自然な自己相似性をもち次々に分割できる (図 5)。この相似縮小した小領域も有界剰余集合となる。

8 最良のアナログデジタル変換：マルコフ分割

位相力学系とはコンパクト空間 Y に定義された連続写像 f の二つ組 (Y, f) である。特に重要例として $m(\geq 2)$ 文字の集合 $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, m\}$ を考え $\mathcal{A}$ 上の両側無限語 $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ の全体の空間に離散位相の直積位相を入れたコンパクト空間 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ とシフト写像 $s((a_i)) = (a_{i+1})$ の二つ組で与えられる空間をフルシフトという。フルシフトの閉部分空間 Y が $s(Y) = Y$ を満たすとき (Y, s) も位相力学系となる。これをサブシフトという。$\mathcal{A}$ 上の有限語からなる任意の集合 F をとり、$\mathcal{A}$ 上の無限語で F の元が部分語として現れないもの全体を X_F 考えると（空でなければ）サブシフトとなるが、逆にサブシフトは禁止語集合を与えることで得られる。

さて測度論的力学系をサブシフトで近似することを考えよう。$\mathbb{X}$ を m 個の部分に測度論的に重なりのないように分割し $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbb{X}_i$ とする。点 x は時間遷移により

$$\ldots \mapsto x_{-1} \mapsto x_0 \mapsto x_1 \mapsto x_2 \mapsto \ldots$$

のように動くとする。もちろん $T(x_n) = x_{n+1}$ である。このとき軌道 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ は $\mathcal{A}$ の無限文字列 (a_i) と $x_i \in \mathbb{X}_{a_i}$ によって対応づけられる。一点 $x \in \mathbb{X}$ に対して $x_n \in T^n(\{x\})$ なるようにとれば、$x \in \mathbb{X}$ の元に対して $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ の元 (a_i) が対応する。この対応を $\pi(x) = (a_i)$ と書く。T が単射と仮定すれば (x_i) は一意的に定まるが、実際にはそうでない場合も扱う。また $\mathbb{X}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ が disjoint ならば a_i は x_i に対して一意に定まるがこれは通常仮定しない。数論研究者はこういう大雑把な定義の書き方は受け付けない人もいるが、これも力学系という学問の性格なのである。

さて、$\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathbb{X}_i$ がマルコフ分割とは、以下の二条件を満たすときに言う。

- π は単射

- $\pi(\mathbb{X}) = X_F$ で禁止語集合 F は有限集合

禁止語集合が有限でとれるサブシフトを有限型サブシフトといって、サブシフトの中では可算部分集合だが最も重要なクラスである。有限型サブシフトでは周期軌道、エントロピーなどの不変量が簡単に計算できるのが大きな利点である。この定義の言いたいことは $\mathbb{X}$ が良い分割を持てば力学系の基本性質が比較的よくわかるという事である。卑近な言葉でいえばアナログデジタル変換の中で最良の性質をもつような空間分割をマルコフ分割というのである。

9 数論とマルコフ分割

マルコフ分割の定義は森羅万象が人間の把握できる簡単な文字列で説明できるという、ご都合主義な感じがするものだが実際にそんな都合のよい分割があるのだろうか。驚くべきことに、このような分割はかなり一般的な力学系に対し存在するのである。Adler-Weiss によってトーラスの双曲的自己同型のマルコフ分割がみつかり、1970 代に爆発的に進展し大きな成果を生んだ。一般の力学系にはマルコフ分割が存在するとは限らないが、拡大的な場合や双曲的な場合などよい仮定の下では存在するのである。マルコフ分割の存在がわかると不変測度が不明な系でも、その最も適切な不変測度が抽出できる。Sinai-Ruelle-Bowen の理論は力学系の理論の巨大な発展をもたらした。

しかしトーラス同型に限ってみても 2 次元では比較的簡単な長方形型の領域で分割すればよかったが 3 次元以上になったときはそのような簡単な領域はとれない。その形状を具体化するのは難しい問題として残っている。

さてロジーフラクタルは前節に述べたような有界剰余集合の構成に役立つと書いたのだが、実はその構成法は数論への応用にとどまらない。前節の単位ベクトルの折れ線を、向きにより分類し左端点を射影したものと右端点を射影したものを描くと

となって、無限語上のシフトが三領域を平行移動で入れ替える操作に対応している。これを領域交換の力学系という。さらに進んでこのロジーフラクタルを有理平面 $x+y+z=0$ への射影するとトーラス同型のマルコフ分割まで与えているのである (詳しくは文献 Fogg [4] 参照)。これは驚くべき事実であって現在も様々な方向で発展している。日本では伊藤

(a) (b)

図 5: (a) 左端点の色分け (b) 右端点の色分け

俊次とその周辺の研究者が一連の仕事でロジーの方法をより一般的に通用するものに拡張してきた。中でも特に重要なのは置換規則 σ をより幾何学的な双対置換規則に置き換えることでロジーの結果を深く理解しようとするもので、Arnoux-伊藤 [1] は、その双対の方法を完成させた。

置換規則 σ は自己相似な系を与えるが、有限個の置換規則で全体として不変な系のことを $S-adic$ システムという。ここまで考察を広げると一般の同時近似を扱う高次元連分数と対応することになる。この方向でも現在様々な試みがなされていることを注意したい。[2]

10　関連する文献

本稿と密接に関係する記述が「数学のたのしみ」誌 [12] にもある。近年数論と力学系の連携が大きく発展している分野が多くある。エルゴード的ラムゼー理論と呼ばれ、整数の集合上での多重再帰性を調べる研究は Furstenberg [5] の研究が嚆矢となり歴史も古いが、近年大きく発展した。教科書として Einsiedler-Ward [3] が出版された。有理関数の反復の軌道を数論的枠組みで考えようとする数論力学系と呼ばれる分野も進展が著しい。Silverman [11] が最初の参考文献となる。

参考文献

[1] P. Arnoux and Sh. Ito. Pisot substitutions and Rauzy fractals. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, Vol. 8, No. 2, pp. 181–207, 2001.

[2] S. Akiyama (Ed.). *Natural extension of arithmetic algorithms and S-adic system*, Vol. B58 of *RIMS Kokyuroku Bessatsu*. 2016.

[3] M. Einsiedler and T. Ward. *Ergodic theory with a view towards number theory*, Vol. 259 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.

[4] N. Pytheas Fogg. *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, Vol. 1794 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[5] H. Furstenberg. *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981. M. B. Porter Lectures.

[6] S. Grepstad and N. Lev. Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation. *Geometric and Functional Analysis*, Vol. 25, No. 1, 2015.

[7] A. Haynes and H. Koivusalo. Constructing bounded remainder sets and cut-and-project sets which are bounded distance to lattices. *Israel J. Math.*, Vol. 212, No. 1, pp. 189–201, 2016.

[8] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Vol 2: Seminumerical Algorithms.* Addison Wesley, London, 1981.

[9] G. Rauzy. Nombres algébriques et substitutions. *Bull. Soc. Math. France*, Vol. 110, No. 2, pp. 147–178, 1982.

[10] G. Rauzy. Ensembles à restes bornés. In *Seminar on number theory, 1983–1984 (Talence, 1983/1984)*, pp. Exp. No. 24, 12. Univ. Bordeaux I, Talence, 1984.

[11] J. H. Silverman. *The arithmetic of dynamical systems*, Vol. 241 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2007.

[12] 伊藤雄二他. 力学系理論と数論のからみあい. 数学のたのしみ, 別冊・数学セミナー フォーラム:現代数学の風景, 第 6 巻, pp. 22–74. 日本評論社, 1998.