Dynamical norm 予想と Pisot タイル張り

秋山茂樹（新潟大）

筆者は Pisot 数による数系と、それに付随するタイル張りに興味をもちここ数年考えてきた。しかし、まだ問題の輪郭が分かってきた程度であって解決というにはほど遠い。本稿ではどの程度まで分かったのか、何が問題なのかをまとめてみたい。

1 Pisot 数系

まず定義からはじめよう。β を 1 以上の固定した実数とする。正の実数 x は自然数 $a_{-i} \in [0, \beta) \cap \mathbb{Z}$ （以下これらをアルファベットともいう）を用いて

$$x = \sum_{i \geq N_0} a_{-i}\beta^{-i} = a_{-N_0}\beta^{-N_0} + a_{-N_0-1}\beta^{-N_0-1} + \dots$$

と展開することができる。この展開は

$$\left| x - \sum_{i=N_0}^{N} a_{-i}\beta^{-i} \right| < \beta^{-N}$$

が全ての $N \geq N_0$ で成立するという条件を加えれば一意に定まる。これを x の底 β にかんする greedy expansion という。この展開は十進法や二進法を実数を底とする場合に自然に拡張したものである。このような展開は Rényi により導入され [18] や Parry [15] で詳しいエルゴード理論的な性質を調べられた。一般の β を用いた場合にその展開に何らかの数論的な意味を見いだすのは難しい。そこでいくつかの制限を加えていくことになる。集合 $\mathrm{Fin}(\beta)$ を有限な greedy expansion で表される実数の全体とする。このとき

$$\mathrm{Fin}(\beta) = \mathbb{Z}_{\geq 0}\left[\frac{1}{\beta}\right] \qquad \text{(F)}$$

という条件を考える。右辺は $1/\beta$ による非負整数係数多項式のなす集合を表す。この (F) は 1 より大な整数を底とした場合には明らかに成立している。自明でない例として

例 1. β を黄金比 $(1+\sqrt{5})/2$ としよう。この場合 greedy な表記は $0,1$ という二つのアルファベットで表される。$\beta^2=\beta+1$ であるから $100=11$ となる。すなわち 1 が連続して現れた場合には上に繰り上がる事になる。自然数は順に繰り上げたり、繰り下げたり行うと β を底とする greedy expansion に到達する。

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
2 &= 1.11 = 10.01\\
3 &= 11.01 = 100.01\\
4 &= 101.01\\
5 &= 102.01 = 101.12 = 110.02 = 1000.1001
\end{aligned}$$

このように greedy expansion に至る過程は複雑にみえる。実二次体のノルムが負の単数については (F) を満たしこの過程は有限回で終了することをはじめて示したのは K.Schmidt [19] である。

Pisot 数とは 1 より大の代数的整数であってその自分自身を除く共役の絶対値が 1 より小なものをいう。Salem 数とは 1 より大の代数的整数であってその自分自身以外の共役の絶対値が 1 以下であり、少なくとも一つの共役の絶対値が 1 であるものをいう。Frougny と Solomyak は [10] で条件 (F) が成り立つならば β は Pisot 数であるという事を示した。また同じ論文で $\mathbb{Z}_{\geq 0} \subset \mathrm{Fin}(\beta)$ ならば β は Pisot 数または Salem 数であることを示している。実はこの主張は少し改善できて次も言える。

命題 1 ([4]). β が $\mathbb{Z}_{\geq 0} \subset \mathrm{Fin}(\beta)$ ならば β は Pisot 数である。

この (F) という性質を代数的に特徴付ける問題はなかなか奥深い面白い問題である。[10] では β の最小多項式が

$$x^m - a_{m-1}x^{m-1} - a_{m-2}x^{m-2} - \ldots - a_1 x - a_0$$

で $a_{m-1} \geq a_{m-2} \geq \ldots \geq a_0 > 0$ のとき β が (F) を満たすことを示した。([11] も参照）私は [1],[3] において β が (F) を満たすための必要十分条件を与えた。しかし決定版といえる簡明なものは今のところ存在しないといって良いだろう。なお次数 3 次以下の単数に限れば最終的な結果がある。2 次については上に述べた K.Schmidt の結果と私の [1] の結果を合わせれば良い。3 次については

定理 1 ([4]). β を 3 次の Pisot 単数とする。β が (F) を満たすことの必要十分条件はその最小多項式 x^3-ax^2-bx-1 が

$$a \geq 0 \quad \text{and} \quad -1 \leq b \leq a+1$$

を満たすことである。

いずれにせよ Pisot 数系は我々の十進法などと似た性質を持つことが証明される。たとえば有理数の展開は循環小数となることは文献上は [19] と [8] により発見されている。筆者は [1] の主定理で次を示した。

定理 2. β が Pisot 単数（Pisot 数かつ単数）で (F) を満たすならある正数 c が存在し c 未満の正の有理数は全て純循環である。

この定理は c の存在を保証しその証明をみれば具体的な値も計算できる。しかし c の上限は証明からは分からない。ノルムが負の 2 次の単数の場合に [19] が $c = 1$ (従って当然上限）を与えているが 3 次以上の場合には c の上限は 1 より真に小さい場合がある。([1] の example) この定理は Pisot 単数で (F) を満たすものは十進法などと非常に類似した性質を持つことを示している。

2 Pisot タイル張り

定理 2 における c の上限を計算する事は面白い問題である。そこには Pisot 数の生成するタイル張りが本質的な役割を果たす。以下、その定義を復習する。まず $\beta > 1$ を一般に n 次の実代数的数とし自然な埋め込み $\mathbb{Q}(\beta) \to \mathbb{R}^n$ を非自明な共役へ制限して $\Phi : \mathbb{Q}(\beta) \to \mathbb{R}^{n-1}$ を定義する。すなわち trivial な埋め込みだけを捨てるのである。さて β には (F) を仮定する。従って命題 1 により β は Pisot 数である。$\mathrm{Fin}(\beta)$ をその小数部分により分類し

$$\mathrm{Fin}(\beta) = \bigsqcup_{\omega} S_\omega \tag{1}$$

とする。すなわち ω は小数部分を表し、S_ω は $\mathrm{Fin}(\beta)$ の部分集合で小数部が ω と一致するものとする。たとえば $S_{.001}$ は小数部分が .001 となる $\mathrm{Fin}(\beta)$ の元の集合である。$S_.$ は小数部分のないものの集まりであるがこれは間違えやすい記号なので $\mathcal{S}$ とも書き表す。さて $\mathrm{Fin}(\beta)$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ では稠密であるので $\mathbb{R}$ の位相で closure をとれば

$$\mathbb{R}_{\geq 0} = \overline{\bigsqcup_{\omega} S_\omega}$$

を得る。しかし各 S_ω 自体は discrete であって、有界でもなくその性質はここからはよく分からない。そこで (1) の両辺に Φ を施してから $\mathbb{R}^{n-1}$ の位相で closure をとることにする。すると

命題 2 ([3]). β が n 次の Pisot 数ならば、$\Phi(\mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0})$ は $\mathbb{R}^{n-1}$ で稠密である。

が証明でき次のような $\mathbb{R}^{n-1}$ の分割を得る。

$$\mathbb{R}^{n-1} = \bigsqcup_{\omega} \overline{\Phi(S_\omega)}$$

ここで $T_\omega = \overline{\Phi(S_\omega)}$ とおく。また $\mathcal{T} = \overline{\Phi(\mathcal{S})}$ とし、これを中心タイルと呼ぶ。$\Phi(S_\omega)$ が有界ゆえに T_ω はコンパクトである。しかも T_ω たちは平行移動を除いて有限個である。すなわち有限種類のタイルによる空間のタイル張りが出現する。こうして定義されたタイルの性質に関しては次がわかる。

定理 3 ([3]). β が Pisot 単数で (F) を満たすならば原点は中心タイルの内点である。

この事実は極めて基本的で各タイルが $T_\omega = \overline{\mathrm{Inn}(T_\omega)}$ という良い性質を持つことを含んでいる。ここで $\mathrm{Inn}(A)$ は A の内点集合とする。また T_ω の境界が他の有限個のタイルとの交わりの合併となり、その $n-1$ 次元 Lebesgue 測度が 0 である事も導ける。ここでB.Praggastis [15] の結果について少し注意せねばならない。後から [20] で知ったのだが彼女の博士論文（少なくとも現在未だ出版されていない）の結果は少なくとも上の定理の特殊な場合を含んでいる。その問題への接近法は恐らく以下にのべる substitution tiling によるものであって彼女の方法は一般性が高いがかなり複雑でもある。一方 [3] における結果は特殊なケースに限られるが数の幾何を用いる代数的で簡明なものである。従って、メリット、デメリットがあるけれどもどちらの結果も興味深いものと思う。

さてこのようなタイリングが生じることは Thurston [21] によって注意された。この種のタイルの起源はそれより以前に遡り、$x^3 - x^2 - x - 1$ を最小多項式とする場合に Rauzy [17] により構築されたいわゆる Rauzy Fractal が嚆矢である。これらは力学系の研究者により多く研究されており多数の仕事がある。例をあげれば伊藤 & 木村 [12], R.Kenyon [13], R.Kenyon & A.Vershik [14], B.Solomyak [20], B.Praggastis [16]。これらの研究は Toral automorphism に Markoff partition を構成するという文脈で語られ、無限語の置換規則（substitution）の幾何学的実現 (substitution tiling) によりタイルを近似してゆくという雄大なものである。しかしながら、具体的で精密な結果を好む数論の立場から見るとまだまだ多数やるべき事があるように感じられる。たとえばタイルの位相的構造に関して次のような自然な疑問が生じる。

1. 各タイルは連結集合か？
2. 各タイルの境界はどのように記述されるか？
3. 各タイルの内点集合の位相的構造は？たとえば連結性、単連結性はどうか？

これらの疑問は、少なくとも今までの研究ではほとんど扱われていない。しかし、この章の最初に述べた問題などではこのようなタイルの詳しい（私はこういう問題は詳しい問題とは感じないが）性質が正に問題なのである。これらに関し現状を説明したい。

3 Dynamical Norm 予想とタイルの連結性

$\beta > 1$ を一般の実数とする。底 β による greedy expansion の記述に欠かせない 1 の展開を定義する。$1 - [\beta]/\beta$ の greedy expansion が

$$1 - [\beta]/\beta = c_{-2}\beta^{-2} + c_{-3}\beta^{-3} + \dots$$

で与えられるとしよう。$c_{-1} = [\beta]$ とおくことで次の展開を得る。

定義 1.

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \beta^{-i} = .c_{-1}c_{-2}\dots$$

を 1 の展開という。

以下 1 の展開とその生成する $[0, \beta) \cap \mathbb{Z}$ をアルファベットとする語 $c_{-1}c_{-2}\dots$ を同一視する。$[0, \beta) \cap \mathbb{Z}$ で生成される有限語はどの文字から出発しても自然な辞書式順序で 1 の展開より小ならば greedy expansion を与える。無限語の場合にも例外的な展開をのぞき同様の事が成立する（[15] を見よ)。1 の展開が有限で終了する場合には β を simple beta number といい周期的な展開になる場合には cyclic beta number という。むろん 0 の連続することも周期と見なせば simple beta number は cyclic beta number である。Pisot 数は cyclic beta number である。次のような複素変数 z に関する Laurent 級数を考える。

$$\mathcal{G}_\beta(z) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{-i}}{z^i}$$

$\mathcal{G}_\beta$ は $|z| > 1$ で絶対収束で $\mathcal{G}_\beta(\beta) = 0$ を満たす。この級数が $\mathbb{C}$ に有理型に解析接続されるためには β が cyclic beta number であることが必要十分である。（この事実は Polyá の一連の研究に含まれることを数理研での発表の後で長崎大の森川先生にご教示頂いた。）以下、β は cyclic beta number と仮定し次のように Dynamical norm $d(\beta)$ を定義する。

定義 2.

$$d(\beta) = \prod_{\mathcal{G}_\beta(u)=0} |u|$$

非常に多数の数値計算により次の予想ができる。

予想 1 (Dynamical Norm 予想).

$$d(\beta) = |N_{\mathbb{Q}(\beta)}(\beta)|$$

ここで N_K は有限次拡大 $K/\mathbb{Q}$ に関するノルム写像である。

例 2. β を再び黄金比 $(1+\sqrt{5})/2$ とする。β の最小多項式から $1 = \beta^{-1} + \beta^{-2} = .11$ となるがこの展開は自分自身の生成するワード 11 と比較してどの出発点からみても辞書式順序で小さいか等しい。再び [15] の結果によりこの式が 1 の展開を与える。従って

$$\mathcal{G}_\beta(z) = 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}$$

であり、この関数は明らかに $\mathbb{C}$ に有理型に接続される。さてこのとき $d(\beta) = \beta\beta' = 1$ である。ここで β' は β の共役である。したがって予想は正しい。

例 3. β を $x^3 - x - 1$ の正の実根とする。これは最小の Pisot 数であることが証明されている。このとき $1 = \beta^{-2} + \beta^{-3} = .011$ は 11 が 011 より辞書式順序で大なので 1 の展開ではない。この場合は $1 = \beta^{-1} + \beta^{-5} = .10001$ が 1 の展開となる。従い

$$\mathcal{G}_\beta(z) = 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^5} = \frac{z^5 - z^4 - 1}{z^5}$$

となる。$(z^5 - z^4 - 1) = (z^3 - z - 1)(z^2 - z + 1)$ でこの場合も $d(\beta) = 1$ となる。すなわちこの場合も余計な因子は出てくるものの予想は正しい。$\mathcal{G}_\beta$ は当然 β の最小多項式で割り切れるがその商としてでてくる余分な因子は必ずしもこのように円分多項式またはその積とは限らない。

この予想は β が 2 次以下の場合および、3 次の Pisot 単数の場合 ([4])、4 次の Salem 数の場合 ([9]) に成立していることが示されている。

この予想は Pisot タイルの連結性と関係がある。

定理 4 ([3]). β を Pisot 単数で (F) を満たすものとする。このとき β が Dynamical Norm 予想を満たせば各タイルは弧状連結である。

この場合 β が Dynamical Norm 予想を満たすことは 1 の展開の末尾が 1 で終了することに他ならない。

4 タイルの境界の記述

定理 3 は実はもっと強く $\mathrm{Fin}(\beta)$ の全ての元が一つのタイルに属し、従ってその内点であることを示している。これで非常に多数の内点が構成されたわけである。各タイルの境界については一つのタイルと共有部分をもつタイルは有限であるのでその有限個のタイルとの共通部分として表示でき、従って閉集合である。(これらについては [3] を見よ。) この境界については次のことが予想される。

予想 2 (境界の基本予想). 各タイルの境界はグラフ付き自己アファイン集合（ Graph directed self affine set ）の合併である。

このグラフ付き自己アファイン集合とは自己アファイン集合の概念の自然な拡張で、その集合を定義する集合方程式が連立方程式になったものである。すなわち $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ がグラフ付き自己アファイン集合とはその集合方程式が

$$X_i = \cup_{j=1}^{i_j} \psi_{ij}(Y_j) \qquad Y_j \in \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$$

という $(i = 1, 2, \ldots, m)$ 個の集合方程式で表されており各 ψ_{ij} がアファイン写像であって、さらに各 X_i を定義するためにはどの $X_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ も不可欠となっていることを要求するものである。すなわち相互に互いを定義し合って全体を定義しているのであって人間社会を暗示する面白い対象である。私はこういうものを「他己相似図形」などと名付けたいところであるが発音の点で異議がある人が多いかもしれない。なぜ「グラフ付き」というかというと $\{1, 2, \ldots, m\}$ を頂点とし ψ_{ij} に対し $Y_j = X_k$ なら $i \leftarrow k$ で向き付けられた辺を対応させると向き付けられた推移的なグラフを生ずるからである。

例 4 ([2]). β を再び最小 Pisot 数すなわち $x^3 - x - 1$ の正根とする。このとき中心タイル $\mathcal{T}$ の境界は 5 個の自己相似図形の合併である。その集合方程式は具体的に以下で与えられる。

$$\partial(\mathcal{T}) = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5$$

としたとき

$$\begin{aligned}
X_1 &= ((\beta')^5 X_1 + (\beta')^2) \cup ((\beta')^4 X_1 + (\beta')^{-1}) \\
X_2 &= ((\beta')^5 X_2 + \beta') \cup ((\beta')^4 X_2 + (\beta')^{-4}) \\
X_3 &= ((\beta')^5 X_3 + \beta') \cup ((\beta')^4 X_3 + (\beta')^{-2}) \\
X_4 &= ((\beta')^5 X_4 + 1) \cup ((\beta')^4 X_4 + (\beta')^{-5}) \\
X_5 &= ((\beta')^5 X_5 + 1) \cup ((\beta')^4 X_5 + (\beta')^{-3})
\end{aligned}$$

境界の Haussdorff 次元は $1.10026\ldots$ となる。

ここで β' は β の共役の一つ（複素）である。この場合には自己相似となるが、一般には多数のグラフ付き自己アファイン集合となる例を作れる。実際に次も言える。

定理 5 ([5]). β を 3 次の Pisot 単数で (F) を満たすものとする。対応するタイルの内点集合 $\mathrm{Inn}(T_\omega)$ が連結ならばそのタイル T_ω に関し予想 2 は正しい。

この証明はさほど難しくない。3 つ（あるいはそれ以上）のタイルの共有点を頂点と呼ぶとき、これらの間の「辺」に対し連立集合方程式を導ける事を言えばよいからである。従って私の方針はこの内点集合の連結性を考察することになったのである。

5　タイルの内点集合の連結性

当初、この内点集合の連結性に関しては私は楽観的であった。というのも [2] で行った 'encircling method' が一般化されればさほど難しくないと信じていたからである。

今年の夏休みに (F) を満たす $x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ の定義する Pisot 数に付随するグラフ付き自己アファイン集合の集合方程式を計算している内ににわかに信じられない事実に行き着いた。この場合には、タイルの内点集合は連結でも単連結でもない。さらになんと一つのタイルに非可算個の頂点が存在することが証明できるのである！むろんこの場合でも以前にのべた定理の仮定は成立するので、タイル自体は弧状連結で、原点は内点であり内点は十分多くあるのである。この事実は私にとってはかなりの衝撃で二、三日は立ち直れない程であった。気を取り直して現象を一般化し予想の形で述べると次のようになる。

予想 3 (内部構造予想). β を 3 次の Pisot 単数で (F) を満足するものとし、その最小多項式を

$$x^3 - ax^2 - bx - 1$$

とおく。このとき

1. $a > 2b - 4 \Leftrightarrow \mathrm{Inn}(T)$ が連結。

2. $a = 2b - 4 \Leftrightarrow \mathrm{Inn}(T)$ が無限個の連結成分をもち広義の頂点は可算個。

3. $a < 2b - 4 \Leftrightarrow \mathrm{Inn}(T)$ が無限個の連結成分をもち頂点は非可算個。

ここで広義の頂点とは、*3* つのタイルの共有点だけでなくその点を除くとタイル自体が非連結になる点 (cut point) も含むものである。

これに関しての私の到達は

定理 6. $a \le 2b - 4$ ならば $\mathrm{Inn}(T)$ は無限個の連結成分をもつ。$a < 2b - 4$ ならば頂点は非可算個ある。

である。このように Pisot 数の生成するタイル張りの問題には上述した 3 つの予想、すなわち Dynamical norm 予想、境界の基本予想、内部構造予想が機軸になるというのが私の現在の問題把握である。まだまだ解決には遠いけれども今しばらく考えてみたいと思う。

References

[1] S.Akiyama, Pisot numbers and greedy algorithm, Number Theory, Diophantine, Computational and Algebraic Aspects, Edited by K. Györy, A. Pethö and V.T.Sós, 9–21, de Gruyter 1998.

[2] S.Akiyama and T.Sadahiro, A self-similar tiling generated by the minimal Pisot number, to appear in Proceedings volume of 13th Czech and Slovak Conference on Number Theory, Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis.

[3] S.Akiyama, Self affine tiling and Pisot numeration system, to appear in 'Number Theory and its Applications', ed. by K. Györy and S. Kanemitsu, Kluwer

[4] S.Akiyama, Cubic Pisot units with finite beta expansions, preprint.

[5] S.Akiyama, Pisot numeration system and self affine tiling (In Japanese), Surikaisekikenkyusho Kokyuroku No. 1060 (1998), 34–40.

[6] S.Akiyama, On the boundary of self affine tilings generated by Pisot numbers, in preparation.

[7] M.J.Bertin, A. Decomp-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse and J.P. Schreiber, Pisot and Salem numbers, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 1992

[8] A.Bertrand, Dévelopment en base de Pisot et répartition modulo 1, C.R.Acad.Sc., Paris 385 (1977) 419–421

[9] D.W. Boyd, Salem numbers of degree four have periodic expansions, Théorie des nombres, Number Theory, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 57–64, 1989

[10] C.Frougny and B.Solomyak, Finite beta-expansions, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 12 (1992) 713–723

[11] M.Hollander, Linear numeration systems, finite beta expansions, and discrete spectrum of substitution dynamical systems, thesis of Washington Univ.

[12] S.Ito and M.Kimura, On Rauzy Fractal, Japan J. Indust. Appl. Math. 8 (1991) 461-486

[13] R.Kenyon, The construction of self-similar tilings, Geom. Funct. Anal. 6 (1996), no. 3, 471–488.

[14] R.Kenyon and A.Vershik, Arithmetic construction of sofic partitions of hyperbolic toral automorphisms. Ergodic Theory Dynam. Systems 18 (1998), no. 2, 357–372.

[15] W.Parry, On the β-expansions of real numbers, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 11 (1960) 269-278

[16] B.Praggastis, Markov partition for hyperbolic toral automorphism, Ph.D.Thesis, Univ. of Washington, 1992.

[17] G.Rauzy, Nombres Algébriques et substitutions, Bull. Soc. France 110 (1982) 147-178.

[18] A.Rényi, Representations for real numbers and their ergodic properties. Acta Math. Acad. Sci. Hungar 8 (1957) 477–493.

[19] K.Schmidt, On periodic expansions of Pisot numbers and Salem numbers, Bull. London Math. Soc. 12 (1980) 269–278

[20] B.Solomyak, Dynamics of self-similar tilings. Ergodic Theory Dynam. Systems 17 (1997), no. 3, 695–738.

[21] W.P.Thurston, Groups, Tilings and Finite state automata, AMS Colloquium lectures, 1989.

Shigeki Akiyama

Department of Mathematics, Faculty of Science
Niigata University,
Ikarashi-2 8050, Niigata
950-2181, JAPAN
E-mail: akiyama@math.sc.niigata-u.ac.jp
http://mathalg.ge.niigata-u.ac.jp/~akiyama