

# Pisot 数系と自己アファインタイリング

秋山 茂樹 (Shigeki Akiyama) 新潟大・理

## 1 Introduction

実数  $\beta > 1$  を固定し、任意の正な実数  $x$  を

$$x = \sum_{-\infty < i \leq N_0} a_i \beta^i = a_{N_0} \beta^{N_0} + a_{N_0+1} \beta^{N_0+1} + \dots \quad (1)$$

の形に表す事を考える。ただし

$$\forall N \quad |x - \sum_{N \leq i \leq N_0} a_i \beta^i| < \beta^N \quad (2)$$

を満たすものとする。このような展開はすべての実数に対して存在し、「強欲算法」によって得られる。本稿ではこの展開を  $x$  の  $\beta$  展開と呼ぶ。このような展開は通常の二進法や十進法の拡張である。以下、簡単のため

$$x = a_{N_0} a_{N_0+1} a_{N_0+2} \dots \quad (3)$$

などと書く事にする。本稿で問題にしたいのは  $\beta$  が Pisot 数の場合である。ここで Pisot 数とは代数的整数であって自分自身以外のすべての共役の絶対値が 1 未満のものをいう。この場合には有理数の  $\beta$  展開が循環小数となるなど通常の数の表現と似た性質があるので特に興味深い。以下このような Pisot 数を base にした  $\beta$  展開を用いて数を表示する事を総称して Pisot 数系と名付けよう。[1] において筆者はこの展開の基本的性質を論じた。特に興味を持ったのは展開がいつ有限となるのか、いつ純循環となるのかなどの問題である。次の性質を考える

**(F)** 全ての正な  $x \in \mathbf{Z}[\beta]$  は有限な  $\beta$  展開をもつ。

この性質を満たすための必要十分条件は [1] にある。大切なのはその条件が有限のアルゴリズムで実際に確かめられる点である。また証明から容易にわかるのだが (F) は次の性質 (F0) と同値である。

**(F0)** 全ての正な  $x \in \mathbf{Z}[\beta^{-1}]$  は有限な  $\beta$  展開をもつ。

Pisot 数が単数であるとき単に Pisot 単数と呼ぶことにする。さて [1] の主定理は次のようなものである。

**定理 1.**

$\beta$  を Pisot 単数とする。このとき  $\beta$  が有限条件 (F) を満たすならばある正数  $c$  が存在して閉区間  $[0, c]$  の有理数の  $\beta$  展開は純周期的である。

この  $c$  の上限は無論  $\beta$  に依存して決定されるので  $\gamma(\beta)$  と書くことにする。この  $\gamma(\beta)$  を決定できるかは [1] で筆者が提出した問題であった。本稿の目的は、この  $\gamma(\beta)$  を具体的に計算する方法がある事、およびその問題がある種の自己アフラインなタイルによる空間充填の問題と深く関連していることを紹介することにある。

## 2 Pisot 数系による空間充填タイリング

まず Pisot 数系によるタイリングの説明を行おう。 $\beta$  を  $n$  次の Pisot 数とする。 $\beta = \beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(r_1)}$  を  $\beta$  の実共役  $\beta^{(r_1+1)}, \beta^{(r_1+2)}, \dots, \beta^{(r_1+r_2)}$  および  $\beta^{r_1+r_2+i} = \overline{\beta^{r_1+i}}$  ( $i = 1, 2, \dots, r_2$ ) で複素の共役を定める。当然  $n = r_1 + 2r_2$  である。 $x^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, r_1 + r_2$ ) で  $x \in \mathbf{Q}(\beta)$  の対応する共役を表す。写像  $\Phi : \mathbf{Q}(\beta) \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$  を

$$\Phi(x) = (x^{(2)}, \dots, x^{(r_1)}, \Re(x^{(r_1+1)}), \Im(x^{(r_1+1)}), \Re(x^{(r_1+2)}), \Im(x^{(r_1+2)}), \dots, \Re(x^{(r_1+r_2)}), \Im(x^{(r_1+r_2)}))$$

で定義する。すると次が成り立つ。

**命題 1.**

$\beta$  を  $n$  次の Pisot 数とすると  $\Phi(\mathbf{Z}[\beta]_{>0})$  は  $\mathbf{R}^{n-1}$  で彫密である。

さて  $\beta$  を (F) を満たす Pisot 数とし、 $x \in \mathbf{Z}[\beta^{-1}]_{>0}$  の元を  $\beta$  展開したとき

$$x = a_m a_{m-1} \cdots a_k$$

と表されるとき  $\text{ord}(x) = k$ ,  $\text{deg}(x) = m$  と定義する。また  $m, k$  を整数で  $m > k$  かつ  $m \geq -1$ ,  $k \leq 0$  とし、 $A = a_m a_{m-1} \cdots a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_k$  を  $\beta$  展開とする。この展開には必ず小数点が含まれることに注意して欲しい。このとき  $\beta$  展開で表される  $\mathbf{Z}[\beta^{-1}]_{>0}$  の元であってその展開の末尾が  $A$  と一致するものの全体のなす集合を  $S_A = S_{a_m a_{m-1} \cdots a_1 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_k}$  としよう。すなわち  $S_A$  は

$$b_M b_{M-1} \cdots b_{m+1} a_m a_{m-1} \cdots a_1 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_k$$

という  $\beta$  展開の全体である。特別な場合として

$$S = \{x \in \mathbf{Z}[\beta^{-1}]_{>0} \mid \text{ord}(x) \geq 0\}$$

となるが記号が分かりにくいのでこの場合に限り  $\mathcal{S}$  とも書き表す。さて  $\beta$  展開  $A = a_m a_{m-1} \cdots a_1 \cdot a_{-1} a_{-2} \cdots a_k$  に対して

$$T_A = \overline{\Phi(S_A)}$$

と定義する。また  $\mathcal{T} = \overline{\Phi(\mathcal{S})}$  とする。 $\deg(A) = -1$  のとき  $T_A$  をタイル、 $\deg(A) \geq 0$  のとき部分タイルと呼ぶ。すると  $\mathbf{R}^{n-1}$  はタイルで埋め尽くされる。すなわち次は明らかである。

### 系

$\beta$  が  $n$  次の Pisot 数で (F) を満たすならば

$$\mathbf{R}^{n-1} = \bigsqcup_{\deg(A)=-1} T_A$$

また (F) を満たさない場合にもタイリングを論じることができる。[9] には有限オートマタとの関連で 3 次の Pisot 数による平面充填の問題が扱われている。筆者はこの Thurston の論文を熊本県立大の貞広氏に教えて頂いた。これが  $\beta$  展開の純循環という性質を調べる問題の鍵を握るものであることはその後比較的短期間で気がついた。

さて Pisot 単数の場合には、原点が内点であることも証明できる。すなわち

### 定理 2.

$\beta$  を Pisot 単数で (F) を満たすものとする。このとき任意の  $x \in \mathcal{S}$  について  $x'$  は  $\mathcal{T} = \overline{\Phi(\mathcal{S})}$  の内点である。

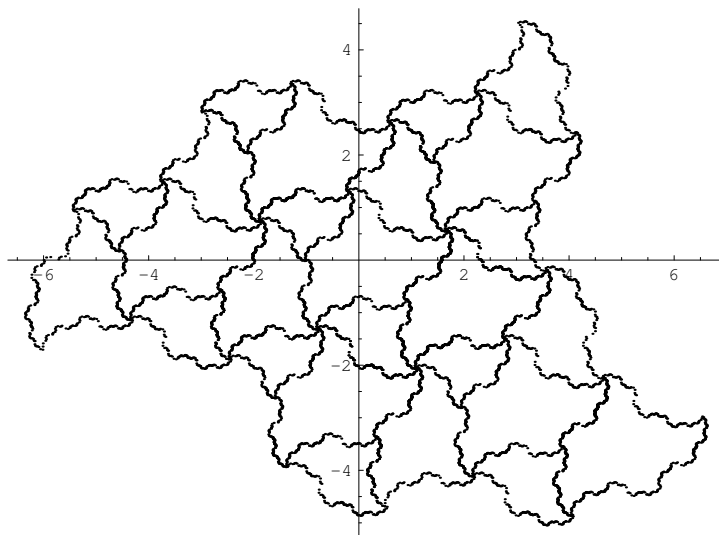
このことからタイル  $T_A$  は自分自身の内点集合の閉包である事がわかる。逆に内点集合の閉包と一致する集合の事をタイルと定義する流儀もある。(F) という仮定は記述の都合上の仮定であって、さらに一般化可能であるが単数であるという仮定は本質的である。

タイルたちは有限個の種類しかなく同じ種類のタイルは平行移動で重なる。また異なるタイルの共通部分の  $n-1$  次元 Lebesgue 測度は 0 である。特に  $n=3$  のとき中央タイル  $\mathcal{T}$  を  $(\beta^{(2)})^{-m}$   $m=1, 2, \dots$  倍したものは有限個のタイルの結合となる。これらのタイルによる空間充填を Pisot 数系による自己アファインタイリングと呼ぶ。

### 例 1.

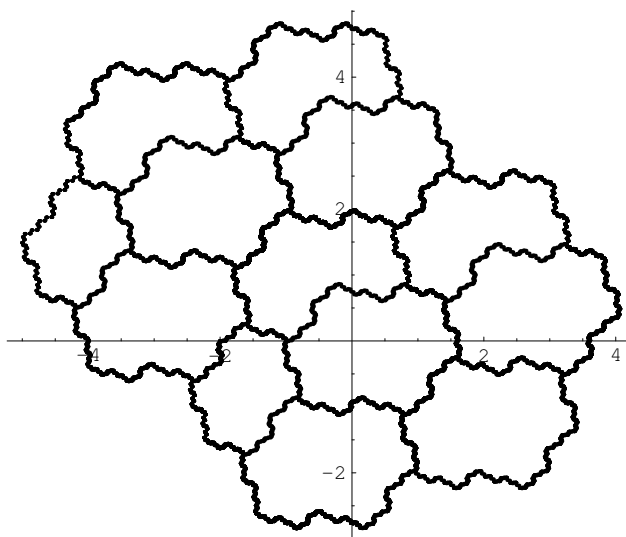
$\theta = 1.3247\dots$  を  $x^3 - x - 1 = 0$  の正の実根としよう。この場合の Pisot 数系はアルファベット  $0, 1$  を用いて表される。さらに 11, 101, 1001, 10001 という部分ワードは現れない。これが  $\beta$  展開であるための必要条件である。さらに  $(00001)^\infty =$

000010000100001... という循環ワードが末尾に現れるような  $\beta$  展開を禁止すれば上の 4 つの部分ワードが現れないことが  $\beta$  展開であるための必要十分条件である。(これは十進法では  $0.9999\dots$  を禁止することで展開の一意性を確保のと同じである。) さて  $\theta$  は最小の Pisot 数であることが知られている。(たとえば [5] を見よ。) このとき生じる  $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$  のタイリングについては [2] で詳しく論じている。



**例 2.**

$\beta = 1.839\dots$  を  $x^3 - x^2 - x - 1$  の正の実根とする。この場合はアルファベットは  $0, 1$  のみで  $111$  という部分ワードは現れない。この場合のタイリングは Rauzy Fractal と呼ばれており、substitution tiling ととらえることで多数の研究がある。([8], [6], [7])



### 3 純循環 $\beta$ 展開とタイリング

さて最初に述べた  $\gamma(\beta)$  の決定の問題は、 $\mathcal{T}$  またはその部分タイルの形状によって完全に記述できる。以下にそのことを説明する。実際  $P(\beta)$  を純循環  $\beta$  展開の全体のなす集合とする。 $x \in P(\beta)$  は

$$\frac{\sum_{i=0}^{M-1} a_i \beta^i}{\beta^M - 1} \quad (4)$$

という形に書ける。ただし  $a_{M-1}a_{M-2}\cdots a_0$  は  $\beta$  展開とする。 $M$  はその倍数に取り替えることも可能であることに注意すると  $\beta$  は Pisot 数であるから  $\Phi(x)$  は  $\Phi(-\sum_{i=0}^M a_i \beta^i)$  と十分近いとしてよい。従って命題 1 により  $-\Phi(x)$  は  $\mathcal{T}$  に含まれる。しかし逆に (4) の形をした元が直ちに純循環というわけではない。というのは  $a_{M-1}a_{M-2}\cdots a_0$  が  $\beta$  展開であっても

$$\cdot a_{M-1}a_{M-2}\cdots a_0 a_{M-1}a_{M-2}\cdots a_0 a_{M-1}a_{M-2}\cdots a_0 \cdots$$

が  $\beta$  展開とは言えないからである。従って循環の先頭部分と尻尾の部分が  $\beta$  展開としてきちんと接続可能という条件が必要となる。 $\sum_{i=0}^{M-1} a_i \beta^i$  の絶対値が小さいときはこの条件を満足するし部分タイルに入っていて尻尾の部分に 0 が続く場合もこの接続条件は満足する。このようにして  $\beta$  の形によって異なるが不等式と部分タイルを用いて  $\overline{\Phi(P(\beta))}$  を完全に記述できる。例 1 の  $\theta$  の場合を述べると

$$\overline{\Phi(P(\beta))} = -T_{0000}.$$

となる。従って

$$\gamma(\theta) = \max(\overline{\Phi(\mathbf{Q})} \cap -T_{0000}.) = \max(\mathbf{R} \cap -T_{0000}.)$$

である。 $-T_{0000}. = -(\beta^{(1)})^4 \mathcal{T}$  なので  $\mathcal{T}$  の境界の状態を詳しく調べれば  $\gamma(\theta)$  を計算できることになる。

詳細の記述は記号が不足であるので [3] に譲るが、以上の考察から実は定理 1 が定理 2 に含まれている事が分かるのである。

### 4 Pisot 数系による自己アファインタイリングの境界に関する予想

前節で  $\gamma(\beta)$  の決定の問題はタイルの境界の決定の問題に帰着した。以下は Pisot 数は 3 次とする。このときタイルの境界は二つのタイルの共有点で与えられる。一つのタイル  $T$  の境界の集合を  $\partial(T)$  とかく。三つのタイルの共有点のことを頂点と呼ぶ。 $T$  の頂点の集合を  $V(T)$  と書く。

### 予想

$\beta$  を 3 次の Pisot 単数で (F) を満たすと仮定する。  $T$  を任意のタイルとする。このとき  $\partial(T)$  は Fractal 集合である。すなわち  $\partial(T)$  の Hausdorff 次元  $s$  は  $1 < s < 2$  を満たす。さらに

1.  $\partial(T)$  は有限個の相似な自己アファイン集合の弱 disjoint な合併である。
2. 自己アファイン集合を定義する縮小写像の固有値は  $\beta^{(2)}, \beta^{(3)}$  である。
3. 三つのタイルは高々 1 点を共有する。
4.  $V(T)$  は  $\mathbf{Q}(\beta)$  内の有限集合である。

ここで弱 disjoint な合併とは、合併を構成する任意の二つの集合の共通部分が高々 1 点のみという事である。筆者はこの予想は境界に関する基本的な事柄と思うので以降「基本予想」と呼ぶ。この予想の高次元への拡張も自然に得られるが記述が面倒なので詳しくは [3] に譲る。

筆者はいくつかの 3 次の Pisot 数系でこの予想を確かめることに成功した。

### 定理 3.

次の最小多項式をもつ Pisot 数に関しては「基本予想」は正しい。

$$x^3 - x - 1, \quad x^3 - x^2 - 1, \quad x^3 - x^2 - x - 1, \quad x^3 - 2x^2 - 2x - 1, \quad x^3 - 2x^2 - x - 1$$
$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1, \quad x^3 - 3x^2 - 4x - 1, \quad x^3 - 3x^2 + x - 1, \quad x^3 - 4x^2 - 4x - 1$$

総実でない 3 次 Pisot 単数で (F) を満たす場合には縮小写像の固有値は複素共役となり、縮小写像が単に複素 1 次式で表される。従ってこの場合は特に扱いやすい。定理 3 のうち  $x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  を除くとこのケースである。

この定理 3 は次の定理 4 から導かれる。

### 定理 4

$\beta$  を 3 次の Pisot 単数で (F) を満たすものとする。このとき  $\Phi([\beta])$  と  $\Phi([\beta]-1)$  が  $\overset{\circ}{T}$  で弧状連結ならば弱い意味では「基本予想」は正しい。ここで  $\overset{\circ}{T}$  は  $T$  の内点集合である。

ここで「弱い意味」とは、自己アファイン集合となるという部分を Graph directed set となるという弱い条件に置き換え、3 つのタイルの共有点が高々 2 つに弱めるという事である。

より詳しい解説は [3] にあるので参照されたい。さて基本予想ができるとタイルの境界は極めてよく分かるので  $\gamma(\beta)$  は実際にいくらでも正確に計算できる。たとえば例 1 の場合

$$\gamma(\theta) = 0.6666666666086440674887\dots$$

となる。昨年の数値計算の段階で私は  $\gamma(\theta)$  を  $2/3$  であると予想した ([4]) が実際はこれより僅かに小さかったのである。実は  $2/3$  自体が  $\partial(P(\theta))$  の点なのである。そして  $2/3$  のごく近傍では境界が無限に込み入って現れる。これがこのような  $2/3$  に極めて近い数字が生ずる理由を説明している。

## 参考文献

- [1] S. Akiyama, Pisot numbers and greedy algorithm, to appear in the Proceedings of the international conference on number theory held at Eger (Hungary) 1996.
- [2] S. Akiyama and T. Sadahiro, A self-similar tiling generated by the minimal Pisot number, preprint.
- [3] S. Akiyama, Self affine tiling and Pisot numeration system, preprint.
- [4] S. Akiyama, Pisot numeration system and Tamura's infinite product (In Japanese), Proceedings of the conference on number theory held at Waseda Univ. (1997)
- [5] M.J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugit, M. Pathiaux-Delefosse and J.P. Schreiber, Pisot and Salem numbers, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 1992
- [6] S. Ito and M. Kimura, On Rauzy Fractal, Japan J. Indust. Appl. Math. 8 (1991) 461-486
- [7] A. Messaoudi, Frontière du fractal de Rauzy et système de numération complexe., preprint.
- [8] G. Rauzy, Nombres Algébriques et substitutions, Bull. Soc. France 110 (1982) 147-178.
- [9] W.P. Thurston, Groups, Tilings and Finite state automata, AMS Colloquium lectures, 1989.