Pisot 数とフラクタルタイリング[*]

秋山 茂樹

平成 16 年 4 月 17 日

1　一様分布論と Pisot 数

Pisot 数を定義する前に一様分布論を復習しよう。[1] 実数列 (u_n)　$n = 1, 2, \ldots$ を考える。$0 \leq a < b \leq 1$ なる a, b に対し $\chi_{[a,b]}$ を閉区間 $[a, b]$ の characterictic function すなわち

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

と定義する。このとき

定義　(u_n) が一様分布する（以下 $u_n : u.d.$ mod 1 と書く）とは

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b]}(\{u_n\}) = \int_0^1 \chi_{[a,b]}(x)dx = b - a$$

が任意の $0 \leq a < b \leq 1$ に対して成立することをいう。ここで $\{x\}$ は x の小数部分である。

明らかにこれは (u_n) の小数部分が一様に $[0, 1)$ に分布している事を表している。いかなる列が一様分布するのかは興味深い数論の問題である。最初の基本的結果を導いたのは H.Weyl であった。

定理 (Weyl)　$(u_n) : u.d.$ mod 1 であることは以下と同値である。全ての $[0, 1]$ で Riemann 可積分な関数 f に対して

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(\{u_n\}) = \int_0^1 f(x)dx$$

これでは定義よりも調べる関数を増やしたようであるが、実際には特殊な関数だけ調べればよい。すなわち

定理 (Weyl)　$(u_n) : u.d.$ mod 1 は以下と同値である。全ての $h = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \exp(2\pi\sqrt{-1}hu_n) = 0$$

[*]このノートは、金沢大学で行われたシンポジウム「代数的組合せ論」6 月 22 日-25 日 (1998) で行った Pisot 数全般に関するかなり私的な survey をまとめたものである。

[1]この節及び次節の結果に関しては [11], [7] を参照。また一様分布論に関するより新しい結果は [9] を見よ。

この定理は Weyl の規準と呼ばれている。一様分布論の重要な部分はこの規準を多くの関数に適用するため様々の巧妙な工夫を行うことに注がれる。ここではこれについては詳述しないが、多項式オーダーの増加関数に関しては一様分布がある程度多くのクラスで証明されており、指数オーダーの増加関数では結果は知られていない。一方、測度論的結果は指数オーダーでも存在する。

定理 (Koksma)　t を閉区間 $[a,b]$ に値をとるパラメータとする。$f_n(t)\quad n=1,2,\ldots$ は実数値関数列で各 $f_n(t)$ は t に関して微分可能とする。さらに全ての m,n $(m\neq n)$ について $f'_m(t)-f'_n(t)$ は t の単調関数であるとし、ある $K>0$ が存在して全ての m,n $(m\neq n)$ および全ての $t\in[a,b]$ について

$$|f'_m(t)-f'_n(t)|>K$$

が成立するならば測度零の例外を除いて全ての $t\in[a,b]$ について数列 $(f_n(t))\quad n=1,2,\ldots$ は一様分布する。

この定理から次はすぐに従う。

系 1.　$\alpha>1$ を固定するとき $(\lambda\alpha^n)\quad n=1,2,\ldots$ はほとんど全ての実数 λ に関して一様分布する。

系 2.　$\lambda\neq 0$ を固定する。このとき $(\lambda\alpha^n)\quad n=1,2,\ldots$ はほとんど全ての $\alpha>1$ に対して一様分布する。

ここで、「ほとんど全て」というのは、測度零の例外を除いてという意味で用いている。特に系 2. からほとんど全ての $\alpha>1$ に対して $(\alpha^n)\quad n=1,2,\ldots$ は一様分布するが、(やや驚くべきことに) 一つとして具体的に (α^n) が一様分布する α は知られていないのである。[2]

未解決問題　$((\frac{3}{2})^n)$ や (e^n) は一様分布するか？

しかしながら (α^n) が一様分布**しない**例は無限に存在する。たとえば α を 2 以上の整数とすれば小数部分はないので明らかに一様分布ではない。だがもっと非自明な例もある。

例　ω を黄金比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とする。このとき $||\omega^n||\to 0$ が成り立つ。ここで $||x||$ は x と整数との距離である。

この現象は ω が Pisot 数と呼ばれる Koksma の定理の例外集合に属する事から生じる。

定義　実数 $\beta>1$ が Pisot(-Vijayaraghavan) 数であるとは、代数的整数であって自分自身と異なる共役の絶対値が 1 より小のときいう。また実数 $\beta>1$ が Salem 数であるとは、代数的整数であって自分自身と異なる共役の絶対値が 1 以下であって少なくとも一つの共役の絶対値が 1 であるものをいう。

[2] 講演でこのように述べたのですが、この認識はいささか古かったようです。M.Levin が (α^n) がこのような α を具体的に構成していました。さらに彼の構成したものは一様分布より強い完全一様分布という性質を満たし、その Discrepancy も最善に近い上からの評価を持ちます。[9] の 118p-138p をご覧下さい。ただし、彼の構成法は具体的とはいえ α の値を順に精密に決定していくプロセスの存在証明であって、その数の数論的性質は分かりません。

例　$\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988\cdots$ の共役は $\omega' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ であって $|\omega'| < 1$。したがって ω は Pisot 数である。また $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$ の 1 より大な実数根

$$\frac{1+\sqrt{13}}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{13}-1}{2}} = 1.7220838\cdots$$

は Salem 数である。

このとき次が証明できる。

命題　α が Pisot 数ならば $\lim_{n\to\infty} ||\alpha^n|| = 0$ がなりたつ。また α が Salem 数ならば α^n の小数部分 $\{\alpha^n\}$ は $[0,1)$ に稠密に分布するが、(α^n) は一様分布しない。

この立場からは重要な未解決予想は

予想　$\lim_{n\to\infty} ||\alpha^n|| = 0$ ならば α は Pisot 数である。

というものである。この予想に対するアタックの到達点を紹介しよう。

定理 (Cantor, Decomp-Guilloax, Grandet-Hugot [7])　実数 $\alpha > 1$ に対して、ある $\lambda \geq 1$ が存在して全ての $n = 0, 1, 2, \ldots$ について

$$||\lambda\alpha^n|| \leq \frac{1}{2e\alpha(\alpha+1)(1+\log\lambda)}$$

が成立することと α が Pisot 数または Salem 数であることは同値である。

この定理からは次が従う。

系　$||\alpha^n|| = o(\frac{1}{n})$ ならば α は Pisot 数である。

この系は $||\alpha^n||$ が 0 に近づくだけでなくそのスピードが充分速ければ Pisot 数になってしまうことを主張している。このスピードを $o(\frac{1}{\sqrt{n}})$ に緩めても同じ主張が成立する事が知られている。

2　Pisot 数の分布について

Pisot 数に関して一般的に知られている事を幾つか紹介しよう。まず簡単な事実として

命題　実代数体は少なくとも一つの Pisot 単数を含む。

ここで Pisot 単数とは Pisot 数でそれを含む代数体において単数であることをいう。言い替えれば Pisot 単数とは Pisot 数でその最小多項式の定数項が ± 1 のものである。この Proposition の証明には Dirichlet の単数定理の標準的な証明を思い出せばよい。

さて Pisot 数の一般的な分布状況に関しては次の真に驚くべき結果が知られている。S を Pisot 数の全体のなす集合としよう。当然 $S \subset [1, \infty)$ であるがさらに

定理 (Salem)　S は $[1,\infty)$ で closed である。

この定理以前には S が $[1,\infty)$ で彫密であるのではないかと多くの数学者は漠然と思っていた。実際には S はこの定理により nowhere dense になってしまう。なぜならある点 x の近傍 U で彫密なら定理により $U \subset S$ となるがこの U には当然、整数でない有理数や代数的でない点が含まれてしまうので矛盾するからである。もう一つのやはり Salem によるなかなか納得しがたい定理がある。

定理 (Salem)　任意の Pisot 数は Salem 数の集合の集積点である。

この逆に Salem 数が Pisot 数の集合 S の集積点という主張ならば、さもありなんという気がするのだが、実際にはこちらは正しくない。

さて S が $[1,\infty)$ で閉集合である以上最小の Pisot 数があるわけであるがこれは次で与えられる。

定理　最小の Pisot 数は $x^3 - x - 1$ の正根 $\theta = 1.3247179572\ldots$ である。

この定理の最初の証明は C.L.Siegel によると人に聞いたが私には確認できなかった。いずれにせよ、かなり以前の結果であるが決して自明ではない。D.Boyd は任意の区間 $[a,b]$ を与えたときその中にある Pisot 数を決定するアルゴリズムを与えた。以下に小さい Pisot 数とその最小多項式の表を与える。近似値は $\ldots$ 以下を切り捨ててある。

$1.324717957\ldots$	$x^3 - x - 1$
$1.380277569\ldots$	$x^4 - x^3 - 1$
$1.443268791\ldots$	$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 1$
$1.465571231\ldots$	$x^3 - x^2 - 1$
$1.501594803\ldots$	$x^6 - x^5 - x^4 + x^2 - 1$
$1.534157744\ldots$	$x^5 - x^3 - x^2 - x - 1$
$1.545215649\ldots$	$x^7 - x^6 - x^5 + x^2 - 1$
$1.561752067\ldots$	$x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + x - 1$

さらに S の最小の集積点は黄金比 ω であることが知られている。

3　Pisot 数による数系

Pisot 数の様々な応用に関しては [7] に詳しい。以下に扱うのは、この本にはまだ載っていない未解決な問題の多い分野である。

まず任意の $\beta > 1$ を固定する。すると任意の正数 x は $[0,\beta)$ の間の整数 a_i を用いて

$$x = \sum_{i=N_0}^{\infty} a_{-i}\beta^{-i} = a_{-N_0}\beta^{-N_0} + a_{-N_0-1}\beta^{-N_0-1} + \ldots$$

と展開される。ここではこの展開が全ての整数 $N \geq N_0$ に対して次を満たすものとする。

$$|x - \sum_{N_0}^{N} a_{-i}\beta^{-i}| < \beta^{-N}$$

このような展開を x の底 β による強欲展開 (greedy expansion) とよぶ。

例　$x = 10, \beta = \sqrt{7}$ としよう。すると使える digit は {0,1,2} であって

$$\begin{aligned} 10 &= 7 + \sqrt{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7\sqrt{7}} + \frac{1}{49\sqrt{7}} + \dots \\ &= \beta^2 + \beta + 2\beta^{-2} + \beta^{-3} + \beta^{-5} + \dots \\ &= 110.02101\dots \end{aligned}$$

となる。最後の表示は 10 進法などの表記に習って digit だけ並べたものでこのような表記を以下でも自由に用いる。なお、この展開は循環しないことが証明できる。([1])

さて $\beta > 1$ を整数でない任意の実数としよう。$1 - [\beta]/\beta$ を greedy に展開すると

$$\begin{aligned} 1 - [\beta]/\beta &= b_{-2}\beta^{-2} + b_{-3}\beta^{-3} + \dots && (1) \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} b_{-i}\beta^{-i} && (2) \end{aligned}$$

となるがここで $b_{-1} = [\beta]$ とおいて次のように定義する。

定義　$1 = \sum_{-1}^{\infty} b_{-i}\beta^{-i} = .b_{-1}b_{-2}b_{-3}\dots$ を 1 の展開とよび $d(1,\beta) = .b_{-1}b_{-2}\dots$ と書く。

1 の展開は greedy expansion を実トーラス $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \simeq [0,1)$ に働く力学系としてとらえるとき大事な役割を果たす事が知られている。([12]) 以下、1 の展開をその対応するワード $b_{-1}b_{-2}b_{-3}\dots$ と同一視する。

例　$\omega = (1+\sqrt{5})/2$ のとき $d(1,\omega) = .11$、最小 Pisot 数 θ の場合 $d(1,\theta) = .10001$ となる。

$[0,\beta) \cap \mathbf{Z}$ を用いたワードはどの出発点からみても $d(1,\beta)$ と比べ辞書式順序で小さいならば admissible という。greedy expansion によってできるワードはもはや繰り上がりがないので admissible となる。この逆も例外的な展開を除けば正しい。([12] をみよ。)

定義　$d(1,\beta)$ が有限のとき β のことを simple beta number という。また $d(1,\beta)$ が循環する展開（当然、有限の場合も含む）をもつならば β のことを cyclic beta number という。

このとき次が知られている。

定理 (Parry)　$[0,\infty)$ において simple beta number は稠密である。

定理 (Parry)　cyclic beta number の自分自身をのぞく共役の絶対値は 2 未満である。

前に述べた Salem の定理と比較すれば cyclic beta number は Pisot 数より随分多いことが分かる。この 2 という数字は黄金比 ω にまで改良できる。さて有理数の greedy 展開については次が知られている。

定理 (A.Bertrand [8], K.Schmidt [14])　β を Pisot 数とするとき、実数 $x > 0$ が循環することと x が $\mathbf{Q}(\beta)_{>0}$ に属することは同値である。

定理 (K.Schmidt [14])　$\beta > 1$ を任意の実数とする。全ての $x \in [0,1] \cap \mathbf{Q}$ が β を底とした greedy expansion で循環するならば β は Pisot 数 または Salem 数である。

Salem 数の場合に全ての有理数が循環するか否かは重要な未解決問題である。いずれにせよ Pisot 数を底とする greedy 展開は興味深い研究対象である。以下 Pisot 数で任意の正数を展開する方法を Pisot 数系と呼ぶ。Pisot 数系の greedy 展開を調べていくうえで基本的な事の一つに、そもそも正整数の展開が有限なのかという問題がある。

定義　$\beta > 1$ を任意の実数とし、$\mathrm{Fin}(\beta)$ を全ての有限 greedy 展開のなす集合とする。

命題 (Frougny & Solomyak [10]) $\mathbf{Z}_{\geq 0} \subset \mathrm{Fin}(\beta)$ ならば β は Pisot 数または Salem 数である。

実はこの主張は次のように改善できる。

命題 (A [4]) $\mathbf{Z}_{\geq 0} \subset \mathrm{Fin}(\beta)$ ならば β は Pisot 数である。

この定理はなぜ Pisot 数系を特別視すべきなのかの理由を説明しているとも考えられる。次の条件を考える。

$$(\mathbf{F}) \qquad \mathrm{Fin}(\beta) = \mathbf{Z}[\beta^{-1}]_{\geq 0}$$

この条件は 10 進法の $\beta = 10$ では自明である。一般にこの条件の成立を期待したいところであるが Pisot 数でもこの条件を満たさないものも多く存在する。(F) を満たす Pisot 数の代数的な特徴付けは満足のいく形にはできておらず重要課題の一つとなっている。以下 β は代数的とし $\mathrm{Irr}(\beta)$ を β の最小多項式（係数は $\mathbf{Z}$) とする。このとき

定理 (Frougny & Solomyak [10])　$\mathrm{Irr}(\beta) = x^m - a_{m-1}x^{m-1} - a_{m-2}x^{m-2} - \ldots - a_0$ が $a_{i+1} \geq a_i \quad i = 0, 1, \ldots, m-2$ と $a_0 > 0$ を満たすならば、β は Pisot 数であって (F) を満たす。

という美しい定理がある。しかし、この条件は必要十分条件ではない。一般の Pisot 数の場合には次の方法で判定できる。

定理 (A, [3])　β が (F) を満たすことと次の有限集合の全ての元が有限展開されることは同値。

$$\left\{ x \in \mathbf{Z}[\beta] \;\middle|\; 0 < x = x^{(1)} < 1, |x^{(j)}| \leq \frac{[\beta]}{1 - |\beta^{(j)}|} \quad j = 2, 3, \ldots, m = \deg(\beta) \right\}$$

ここで $x^{(j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$ は $x \in \mathbf{Q}(\beta)$ の共役である。この定理は固定した Pisot 数が (F) を満たすかどうかの判定条件を与えるが、代数的な特徴付けでないので $\mathrm{Irr}(\beta)$ の形をみただけで

は (F) を満たすかどうかは分からない。しかし私は最近この定理を用いて 3 次の Pisot 単数で (F) を満たすものを決定することができた。

定理 (A, [4]) β を 3 次の Pisot 単数とする。β が (F) を満たすための必要かつ充分な条件は最小多項式が以下の形をしているときである。

$$\mathrm{Irr}(\beta) = x^3 - ax^2 - bx - 1$$

かつ $-1 \le b \le a+1$。

この節の最後に [1] の主定理を述べる。

定理 (A, [1]) β が Pisot 単数で (F) を満たすとしよう。このときある正数 c が存在して $\forall x \in \mathbf{Q} \cap [0, c]$ の greedy expansion は純循環する。

この定理は、証明したときには気づいていなかったのだが以下に述べる Pisot 数の生成するタイル張りとも深く関係している。

4 Pisot 数によるタイル張り

以下の議論は次数 n の Pisot 数に対して可能であるがここでは説明を簡単にするため 3 次の Pisot 数で総実でないものとする。(一般論については [3] を参照。)

β を 3 次の総実でない Pisot 数で (F) を満たすものとする。一つの β の複素な共役を $\beta' \notin \mathbf{R}$ を固定する。Φ を β を β' に送る共役写像とする。さて β は (F) を満たすのであるから、$\mathrm{Fin}(\beta)$ の元をその小数部分に関して分類することで次の disjoint な分割を得る。

$$\mathrm{Fin}(\beta) = \bigsqcup S_\omega \tag{3}$$

ここで ω は S_ω の元の小数部分を表すワードで、たとえば .1 や .001 などである。但し ω が空語 λ の場合には S_λ は小数部分のない $\mathrm{Fin}(\beta)$ の元の集まりとする。この (3) の右辺の S_ω は、少し考えると平行移動による同値類は有限である事がわかる。さらに $\mathbf{R}_{\ge 0}$ の中で左辺は稠密であるので closure をとると一次元タイル張り

$$\mathbf{R}_{\ge 0} = \bigsqcup \overline{S_\omega}$$

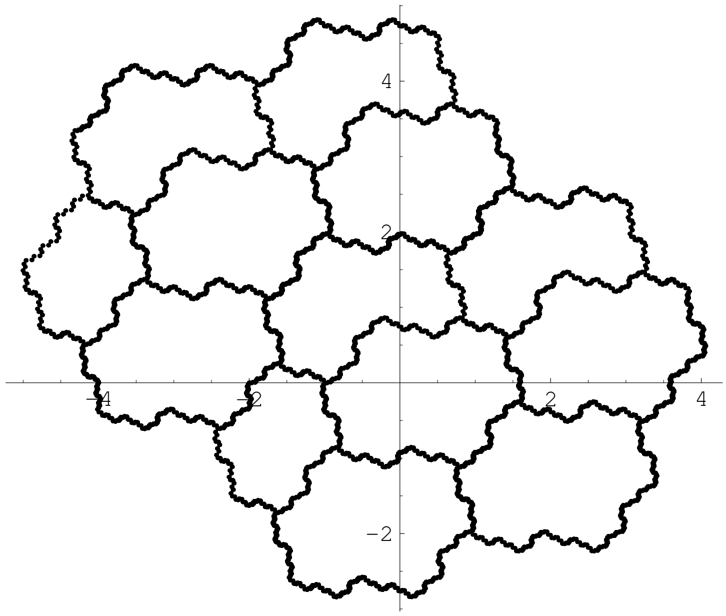
を得る。しかし各 S_ω は無論、有界でないので実態はよく分からない。そこで (3) の両辺に写像 Φ を施し、$\mathbf{C}$ で閉包をとると

$$\mathbf{C} = \bigsqcup \overline{\Phi(S_\omega)} \tag{4}$$

が得られる(証明は [2] と [3])。Pisot 数であるから $|\beta'| < 1$ ゆえ各 $\Phi(S_\omega)$ が有界なことに注意する。また Φ は体の同型写像なので (3) と同様、各 $\overline{\Phi(S_\omega)}$ は平行移動を除いて有限種類のコンパクトな集合からなる。さらに β が単数ならば次がわかる。

定理 (A, [2]、一般には [3]) β を 3 次の総実でない Pisot 単数で (F) を満たすものとする。このとき原点は $\overline{\Phi(S_\lambda)}$ の内点である。

この事は大変基本的な事項でこれ用いると、各タイルの内点集合は彫密であることや、各タイルの境界の 2 次元 Lebesgue 測度が零である事が証明される。すなわち有限種類のコンパクト集合の平行移動により複素平面がタイル張りされタイルの重なりは測度零なのである。現在筆者はこのようにして得られるフラクタルタイル張りに興味をもって研究中である。このタイル張りの絵の例を一つだけ描いておく。これは $\mathrm{Irr}(\beta) = x^3 - x^2 - x - 1$ の場合で G.Rauzy [13] により発見されたものであり現在 Rauzy fractal と呼ばれている。上に述べた基本的性質は図を見れば容易に納得できるだろう。上記のような formulation は [15] による。



これらのフラクタルに関しては何がわかり、何が問題なのかは論文 [2], [3] や数理研講究録 [5], 早稲田大での研究集会報告 [6] でも書いたので重複を避ける。興味のある方はそちらを参照されたい。

参考文献

[1] S.Akiyama, Pisot numbers and greedy algorithm, Number Theory, Diophantine, Computational and Algebraic Aspects, Edited by K. Györy, A. Pethö and V.T.Sós, 9–21, de Gruyter 1998.

[2] S.Akiyama and T.Sadahiro, A self-similar tiling generated by the minimal Pisot number, to appear in Proceedings volume of 13th Czech and Slovak Conference on Number Theory, Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis.

[3] S.Akiyama, Self affine tiling and Pisot numeration system, to appear in 'Number Theory and its Applications', ed. by K. Gyory and S. Kanemitsu, Kluwer

[4] S.Akiyama, Cubic Pisot units with finite beta expansions, preprint.

[5] S.Akiyama, Pisot numeration system and self affine tiling (In Japanese), Surikaisekikenkyusho Kokyuroku No. 1060 (1998), 34–40.

[6] S.Akiyama, Pisot numeration system and Tamura's infinite product (In Japanese), Proceedings of the conference on number theory held at Waseda Univ. (1997) 78-86

[7] M.J.Bertin, A. Decomp-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse and J.P. Schreiber, Pisot and Salem numbers, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 1992

[8] A.Bertrand, Dévelopment en base de Pisot et répartition modulo 1, C.R.Acad.Sc., Paris 385 (1977) 419–421

[9] M.Drmota and R.Tichy, Sequences, Discrepancies and Applications, Lecture Notes in Mathematics 1651, Springer

[10] C.Frougny and B.Solomyak, Finite beta-expansions, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 12 (1992) 713–723

[11] L. Kuipers and H. Niederreiter, Uniform distribution of sequences. , Pure and Applied Math., John Wiley & Sons, (1974)

[12] W.Parry, On the β-expansions of real numbers, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 11 (1960) 269-278

[13] G.Rauzy, Nombres Algébriques et substitutions, Bull. Soc. France 110 (1982) 147-178.

[14] K.Schmidt, On periodic expansions of Pisot numbers and Salem numbers, Bull. London Math. Soc. 12 (1980) 269–278

[15] W.P.Thurston, Groups, Tilings and Finite state automata, AMS Colloquium lectures, 1989.

Shigeki Akiyama

Dept. of Math., Fac. of Science
Niigata University,
Ikarashi-2 8050, Niigata
950-2181, JAPAN
E-mail: akiyama@math.sc.niigata-u.ac.jp
http://mathalg.ge.niigata-u.ac.jp/˜akiyama
（このホームページからも、引用した拙著論文のコピーは入手可能である。）