エルゴード理論と数論——確率は好き？嫌い？

秋山 茂樹

1 不変測度

エルゴード理論は与えられたシステムの時間遷移に関する統計的平均的挙動を調べるための数学的な道具で、統計力学のエルゴード仮説に数学的な基礎づけを与えた理論である。扱う空間は離散的でも連続的でもよく、時間も離散とも連続とも考えることが可能である。考える空間もなんでもよく、なんらかの大きさを測る概念があればよい。統計的平均的な議論をするために重要なのは大きさの概念すなわち「測度」である。特に空間が有限の測度を持つ場合には、正規化することでその事柄の生じる確率測度、すなわち「確率」と思ってよい。本稿では時間は離散的に変化し、空間にこのような確率が定義できる場合を考察する。

例として次の閉区間 $[0,1]$ からそれ自身への写像 T を考えてみよう。

$$T(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,1/2) \\ 2-2x & x \in [1/2,1] \end{cases}$$

この写像はテント写像と呼ばれる連続写像の特別な場合である。$[0,1]$ の数を与えるとこの写像を繰り返すことにより $x, T(x), T^2(x), T^3(x), \dots$ という数列ができる（T^n は T の n 回繰り返し）。これを T による x の軌道と呼ぶ。この軌道を $[0,1/2)$ に入ったときに 0、$[1/2,1]$ に入ったとき 1 を対応させるとたとえば $x = 1/\sqrt[3]{3} \approx 0.693361\dots$ ならば

$$1,1,1,0,1,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0\dots \tag{1}$$

のような文字列が対応する。これをグレイ符号展開と呼ぶことにしよう。[1] 数論的にみれば、これは

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} = 1 - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{19}} - \dots$$

[1] グレイ符号は自然数の表示を与える $0,1$ の文字列で二進表示とは異なる。実数のグレイ符号を考察した文献としては立木 [10] がある。

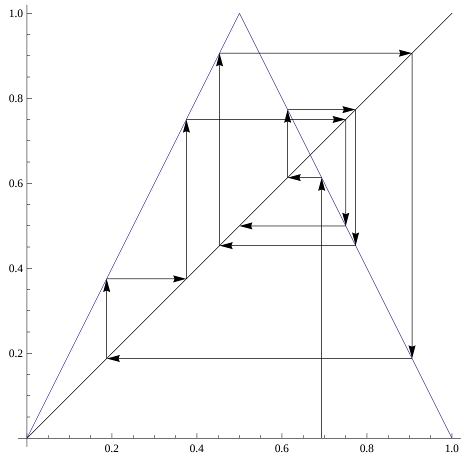


図 1: テント写像による $1/\sqrt[3]{3}$ の軌道

という符号が交互に変化する二進展開を考えることになる。通常の二進展開では

$$0.1111111111 + 0.000000001 = 1.0000000000$$

のようにわずかの差で、多くの繰り上がりが生じて表示が大きく変化してしまうことがある。このグレイ符号展開では写像 T が連続であるため、このような繰り上がりが生じないので計算機による数の表示には都合がよい。

さて $T^n(x)$ は x の位置にある粒子が n 秒後にいる場所を表すと考えよう。したがって空間は $[0,1]$、時間は離散的に遷移する。このとき $[0,1]$ 上のルベーグ 測度 μ は任意のルベーグ可測集合 A に対して次の性質を満たす。

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$$

たとえば $[a,b]$ という部分区間を考えると $T^{-1}([a,b]) = [a/2, b/2] \cup [(2-b)/2, (2-a)/2]$ であるので

$$\mu(T^{-1}([a,b])) = (b-a)/2 + (b-a)/2 = b-a = \mu([a,b])$$

などのようになっていて $[a,b]$ の T での逆像の測度は変わらない。一般にこのような性質をもつ測度を T に関する**不変測度**という。$\mu([0,1]) = 1$ だから μ は確率を与える。このように空間 X と写像 $T : X \to X$ に対して不変確率測度 μ および（当然 T が可測となるような）可測集合の 4 つの組を**測度論的力学系** という[2]。

エルゴード理論でもっとも重要な主人公はこの不変測度である。テント写像の場合にはルベーグ測度が不変測度となるわけだが、一般には空間 X と写像 $T : X \to X$ が与えられても、その不変測度を具体的な関数として書く

[2]本来 4 つの組で書くべきだが、本稿では可測集合は省略し 3 つの組 (X, T, μ) で表す。

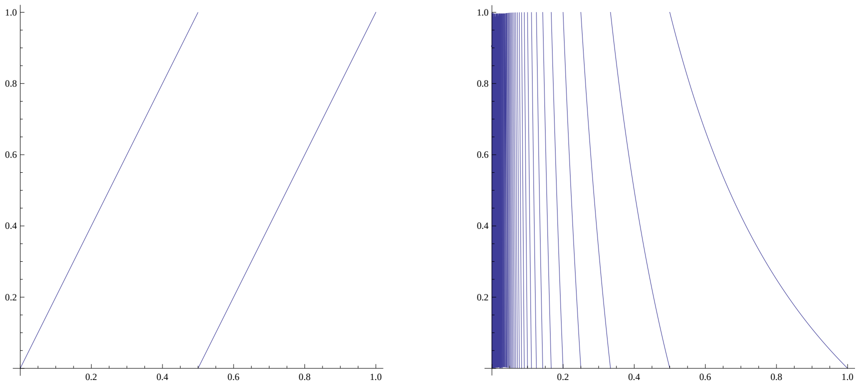
ことは難しい。本稿のテーマであるエルゴード理論の数論的な応用を考える際には、不変測度の具体形が欲しいことが多い。

2　二進展開と連分数

良く知られた数論的なアルゴリズムで不変測度を書いておこう。$X = [0, 1)$ とし

$$B(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0, 1/2) \\ 2x - 1 & x \in [1/2, 1) \end{cases}$$

と B は二進展開を行う写像となる。実数 x の二進展開が $0.b_1 b_2 \dots$ ならば $b_n = \lfloor 2B^{n-1}(x) \rfloor$ が成り立つ。ここで $\lfloor y \rfloor$ は y の整数部分（ガウス関数）を表す。この場合も不変測度は $[0, 1)$ でのルベーグ測度である。たとえば図 2



(a) 二進展開 B のグラフ　　(b) 連分数展開 C のグラフ

のように

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} = 0.10110001100000000001 \dots \tag{2}$$

と展開される。連分数展開は $X = [0, 1]$ とすると

$$C(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

という写像で与えられる[3]。無理数 x の連分数展開を

$$x = \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

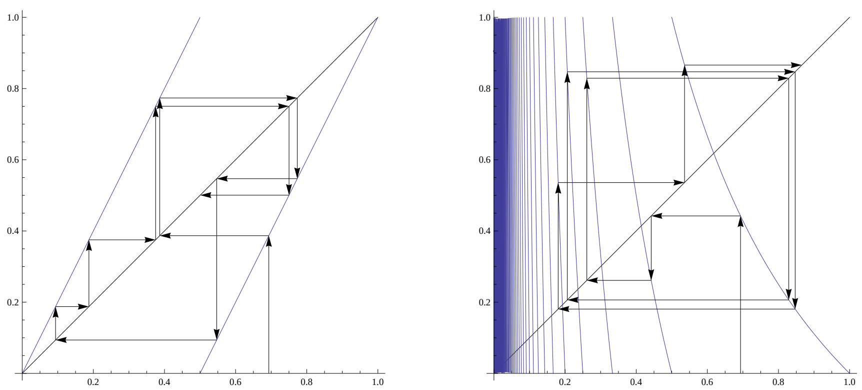
とすると $c_n = \lfloor 1/C^{n-1}(x) \rfloor$ という風に求められることがすぐにわかる。たとえば

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

この場合の不変測度はガウスにより発見されたもので

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{dx}{1+x}$$

となる。前の $1/\log 2$ は正規化の定数であるが、$1/(1+x)$ の形はとても非自明で、ガウスがどうやって見つけたのか分かっていない。このように可測関数の積分の形で与えられる不変測度はルベーグ測度に関して**絶対連続**となり、非常に重要であるが具体形が分かっている場合は少ない。



(c) 二進展開　　(d) 連分数展開

図 2: $1/\sqrt[3]{3}$ の展開

[3] $x = 0$ では定義されない。数論の研究者は気にするがエルゴード理論では気にしない。

X を区間や長方形のような形の具体的に与えられた集合として X から X への写像 T がなんらかの良い性質を満たしているときに、絶対連続な不変測度を求める問題は力学系の歴史的な問題であり、数々の奥深い結果が知られている。

3　エルゴード定理

一般に測度論的力学系 (X, T, μ) が与えられた時、T-不変な可測集合つまり $T^{-1}(A) = A$ を満たす集合が空集合または X 全体しかないときエルゴード的と呼ばれる。定義は少し分かりにくいが T の軌道が X の全体に広がって一つの系をなすという意味である。たとえば、温度の高い水と低い水が断熱材で仕切られている容器を考える。

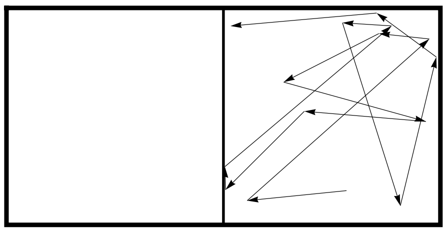


図 3: 非エルゴード的分子運動

このとき高い方の水分子は低い方には運動しないので、X を容器と考え、水分子が運動していると考えると X はエルゴード的ではない。しかし、この断熱材を取り去ったら、エルゴード的となる。これまでに挙げた 3 つの数論的な例は全てエルゴード的となることが証明できる。バーコフの個別エルゴード定理はエルゴード理論の基本定理で、次の事を主張する。

定理 1. (X, T, μ) がエルゴード的ならば、任意の可測関数 f に対して

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(x)) = \int_X f d\mu$$

が測度 0 の例外を除いてすべての点 x で成り立つ。

この主張の意味を上の水の入った容器（断熱材のない場合）の例で考えてみよう。容器の体積は 1 とする。f として U という開集合の特性関数 χ_U をとる。すると主張は

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_U(T^n(x)) = \mu(U)$$

である。左辺は、N 秒までに平均的に何回 U に分子 x が訪問するかを表している。右辺は空間の全測度が 1 なので U の占める空間の中での比率を表す。すなわち左辺は時間平均、右辺は空間平均であり、これが一致するというのが統計力学におけるエルゴード仮説であった。数学での取り扱いでは、エルゴード性という仮定がエルゴード仮説を含んでいることになる。別の言い方をするとエルゴード仮説を最初から仮定してしまって軌道の様々な詳細な結果を導くのが数学におけるエルゴード理論である。この理論では、個々の点の振る舞いには興味がないことに注意しよう。例えば、いつまでも U にとどまり続ける粒子もあるかもしれないが、エルゴード定理の教えるのは、そのような粒子は無視できる（測度零）ということである。

エルゴード理論の良いところは X は測度さえ定義できれば、なんにでも適用できるということである。そのため使える範囲が極めて広範で、数論もその一つの適用例となる。

4　数論との緊張関係

定理 1 を二進展開写像 B に適用してみよう。$X = [0, 1)$ の点 x の二進展開 $x = x_1 x_2 \ldots$ を考えると、$x \in [0, 1/2)$ ならば $x_1 = 0$, $x \in [1/2, 1)$ ならば $x_1 = 1$ となる。さらに

$$
\begin{array}{ll}
x_1x_2 = 00 & x \in [0, 1/4) \\
x_1x_2 = 01 & x \in [1/4, 1/2) \\
x_1x_2 = 10 & x \in [1/2, 3/4) \\
x_1x_2 = 11 & x \in [3/4, 1)
\end{array}
$$

のように $x_1 x_2 \ldots x_k$ で始まる数の全体に対して長さ $1/2^k$ の区間が対応する。また $x = .x_1x_2x_3x_4\ldots$ に対して

$$B(x) = .x_2x_3x_4\ldots$$

となることが分かる。つまり B は二進文字列を左にシフトし、左端の数を捨てる操作に対応する。例として $U = [1/4, 1/2)$ として定理 1 を適用すると

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_U(T^n(x)) = \mu([1/4, 1/2)) = 1/4$$

の意味は、$x = x_1x_2x_3\ldots$ の中に 01 という文字列の現れる頻度（確率）が 1/4 であることを意味している。 もっと一般的に定理 1 は、ほとんど全ての $x \in [0, 1)$ に対して x の二進展開に $x_1x_2\ldots x_k$ の現れる頻度は $1/2^k$ であることを示している。このように、全てのパターンが期待される確率で現れる数を二進正規数という。結論としてほとんどすべての数は二進正規数である。

いくつかの私たちになじみの深い数を考えてみよう。有理数の二進小数展開は循環小数となり、長さ p の前周期と ℓ の循環節の繰り返しに書ける。つまり

$$x_1x_2\dots x_p(x_{p+1}x_{p+2}\dots x_{p+\ell})^\infty$$

のような形である。この場合には固定した長さ m の二進文字列は高々 $p+\ell$ 個しか出てこないので二進正規数ではない。定理 1 によれば、このような例外はルベーグ測度零である。では、e, π, $\sqrt{2}$ のような数はどうなのだろう。ボレルは有理数でない代数的数は二進正規数であろうと予想している。この種の問は数論の難問に分類されるが、個別の数に対して定理 1 は無力である。もっといえば代数的数は可算集合をなすのでルベーグ測度は零である。数論は主に整数の性質に関心を持つわけであるが、エルゴード定理の立場からすれば測度零の集合は無視すべきである。

同様の考察をテント写像 T で行うと、グレイ符号展開に関してもほとんど全ての $x\in[0,1]$ に対して x のグレイ符号展開に $x_1x_2\dots x_k$ の現れる頻度は $1/2^k$ である。また有理数が循環するのも簡単に証明できる。このグレイ符号展開でパターンが期待される確率で生ずる数をグレイ正規数と定義することができる。グレイ符号展開 $g_1g_2\dots$ と二進展開 $b_1b_2\dots$ は $0,1$ に二元体の加法

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+0=1,\ 1+1=0$$

を導入すると $b_n=g_1+g_2+\cdots+g_n$ という関係にある。(1) と (2) で確認していただきたい。これにより相互に書き換え可能で、その変換を考えると二進正規数はグレイ正規数であることが分かる。

連分数展開 C の場合には不変測度がルベーグ測度ではないが具体形が分かっているので、興味深い確率的な結果を得ることができる。x の連分数展開が a から始まるのは $U=(1/(a+1),1/a]$ であるので

$$\lim_{\mathbb{N}\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\chi_U\left(C^i(x)\right)=\frac{1}{\log 2}\int_{1/(a+1)}^{1/a}\frac{dx}{1+x}=\frac{1}{\log 2}\log\left(1+\frac{1}{a(a+2)}\right)$$

より、ほとんどすべての $x\in[0,1]$ について連分数に a が現れる頻度は $\frac{1}{\log 2}\log(1+\frac{1}{a(a+2)})$ である。この結果はレビによる。とくに連分数の c_i には小さい自然数のでる確率が高い。たとえば 1 は $\log(4/3)/\log 2\approx 0.415$ の確率で出現し 2 の出現確率 0.170 の倍以上である。定理 1 に現れる可測関数 f を工夫すれば様々な結果を導くことができる。たとえばヒンチンはほとんどすべての $x\in[0,1)$ で

$$\lim_{n\to\infty}(c_1c_2\dots c_n)^{1/n}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{\log k}{\log 2}}=2.6854\dots$$

を示している。

二進展開と同様に x がガウス正規数であるとは、その連分数展開に与えられた長さのパターンがガウスの不変測度による積分で与えられる頻度で出現する数のことと定義する。良く知られているように連分数は有理数では有限の長さで終了（ある n があって $C^n(x) = 0$ となってアルゴリズムが続けられなくなる）する。ラグランジュは二次の実無理数では連分数展開は循環することを示した。これらを考えると $x \in [0, 1)$ が 3 次以上の実代数的数ならばガウス正規数と予想するのが自然であるが、この方向では私の知る範囲で何もわかっていない。展開を具体的に固定してガウス正規数の例を与えた結果としては [1] がある。異なる連分数の正規性の比較については [7] を参照。

良く知られた $e, \pi, \sqrt{2}$ などの数のなんらかの正規性（グレイ、二進、ガウス）を示すのは大変難しい数論の問題である。二進展開のボレル予想でも現在の数論の到達点からは難しすぎるので、主張を弱めて非自明なことを示すという方向で努力が続けられている ([2, 6])。

エルゴード理論の導く、ほとんど全ての数に成り立つ結果は「では具体的に例や反例を与えよ」という数論的な問題を提出する。これがとても難しく面白い問題なのである。エルゴード理論と数論とはこのような意味で緊張関係にある。エルゴード理論は様々な数論の精密な問題を提示するが、そのような問題の中で手掛かりがあるものは少ない。少しでも部分的に進展できる問題を見つけたり、逆に数論の問題意識からエルゴード理論を見直すという動きが現在とても盛んで面白い分野となっている。

5　Szemerédi の定理と多重再帰性

ラムゼー理論は「完全な無秩序は不可能」という標語で表されるように有限集合が与えられた時、その濃度（元の個数）が十分に大きければ一定の秩序が存在しなければならないという形の主張群を指す ([5])。著名なファン デア ベルデンの定理とは次のようなものである。N 個の自然数を k-色で塗り分ける（すなわち $\{1, 2, \ldots, N\}$ から $\{1, 2, \ldots, k\}$ への写像を決める）ときいかなる自然数 m に対しても、N を十分大きくとれば、長さ m の同色の等差数列が存在する。これは有限集合の濃度のみによる一見単純な主張であるが、証明は簡単でなく理解するだけでもかなりの数学の能力を要する。読者にはヒンチンの名著 [8] の第一章をお勧めする。

Szemerédi は、この主張を「自然数の部分集合でバナッハ上極限密度が正なものは、いくらでも長い等差数列を含む」と一般化した。ここで自然数の部分集合 Y のバナッハ上極限密度とは、

$$\limsup_{m-n\to\infty} \frac{\mathrm{Card}([m, n] \cap Y)}{m - n}$$

である（m, n は自然数）。この元証明は現在でも大変複雑で解説する本もな

いのでアクセスは難しい[4]。

測度論的力学系 (X, T, μ) が与えられた時、一般に任意の可測集合 A で $\mu(A) > 0$ が与えられると、A を出発したほとんど全ての軌道は無限回 A に戻ってくる。この事実を**ポアンカレの再帰性**という。エルゴード性の仮定は不要であり、定理 1 よりも容易な事実であるが、良く考えるとなかなか深みのある結果であることが分かる。Furstenberg は、Szemerédi の結果に刺激を受け、ポアンカレの再帰性を次のように**多重再帰性**という深い結果に進化させた。

定理 2. 測度論的力学系 (X, T, μ) と $\mu(A) > 0$ なる可測集合があるとき任意の k に対して

$$\liminf_{m-n\to\infty} \frac{1}{m-n} \sum_{i=n}^{m-1} \mu(A \cap T^{-i}(A) \cap T^{-2i}(A) \cap \cdots \cap T^{-ki}(A)) > 0. \quad (3)$$

これから直ちに分かるように任意に与えられた長さ k の等差数列（ただし公差は明示できない）をなす時間で A に戻ってくる A の点を見つけることが可能なのである。まず弱混合的なシステムでは (3) は易しい。したがって前節までに述べた三つの数論アルゴリズムでは定理 2 の成立は容易にわかる。また対極にある純離散スペクトルを持つシステムでも (3) は容易である。一般の場合を示すため、このような簡単なものを貼りあわせていくのである。証明の道のりは長いが [3] の詳しい解説がでて勉強はしやすくなった。

この定理 2 は任意の測度論的力学系で成立するが、測度を考えにくい自然数の集合に結果を示すのは難しいように見える。Furstenberg は彼の名を冠する corresponding principle というアイデアで、多重再帰性から Szemerédi の定理を導いた ([4])。これがいわゆるエルゴード・ラムゼー理論の嚆矢であり、数論とエルゴード理論の境界領域のなかで昨今もっとも発展している分野である。

この発展の中にも前節までに述べたのと似た緊張関係がみられる。エルゴード理論は、一般的な結果を多く導くが、数論の要求するような精密さを持たない。上で述べた Furstenberg の方法では、どれほどまで N（およびバナッハ上極限密度）を大きく取れば長さ k の等差数列がとれるのかを導くのは難しい。この N を具体化できるか否かというのは証明が effective か否かという数論に良く現れる重要な問題である。

数論の方法とエルゴード理論の方法のよい緊張関係が新しい結果を産む。そのもっとも著名な結果は Green と Tao による「素数全体の集合はいくらでも長い等差数列を含む」という目を見張る結果だろう[5]。素数の集合は自然数の中ではとても「薄い」集合でバナッハ密度零となるので Szemerédi の定理からこの結果を導くことはできない。整数の深い性質を用いずに証明でき

[4] E. Szemerédi は 2012 年にアーベル賞を受賞した。
[5] T.Tao は 2006 年のフィールズ賞受賞者。

ない事実である。私自身が証明を理解していないことなので解説 [9] を紹介しておくにとどめる。

参考文献

[1] R. Adler, M. Keane, and M. Smorodinsky. A construction of a normal number for the continued fraction transformation. *J. Number Theory*, Vol. 13, No. 1, pp. 95–105, 1981.

[2] D.H. Bailey, J.M. Borwein, R.E. Crandall, and C. Pomerance. On the binary expansions of algebraic numbers. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, Vol. 16, No. 3, pp. 487–518, 2004.

[3] M. Einsiedler and T. Ward. *Ergodic theory with a view towards number theory*, Vol. 259 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.

[4] H. Furstenberg. *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981. M. B. Porter Lectures.

[5] R. L. Graham, B. L. Rothschild, and J. H. Spencer. *Ramsey theory*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1990. A Wiley-Interscience Publication.

[6] H. Kaneko. On the number of digit changes in base-b expansions of algebraic numbers. *Unif. Distrib. Theory*, Vol. 7, No. 2, pp. 141–168, 2012.

[7] C. Kraaikamp and H. Nakada. On normal numbers for continued fractions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, Vol. 20, No. 5, pp. 1405–1421, 2000.

[8] ア・ヤ・ヒンチン. 数論の３つの真珠. 日本評論社, 2000. 蟹江幸博 訳.

[9] 小木曽啓示. 混沌の中の秩序-素数列をめぐって. 数学通信, Vol. 14, No. 4, pp. 7–25, 2009.

[10] 立木秀樹. 実数の表現とグレイコード. 数理科学, Vol. 37, No. 11, pp. 26–33, 1999.